
Google

ELEMENS D'ALGEBRE.

Par M. CLAIRAUT,

De l'Académie Royale des Sciences, des Societés Royales de Londres, de Berlin, d'Upsal & d'Edimbourg, de l'Académie de l'Institut de Bologne.



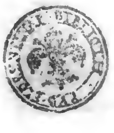
A PARIS,

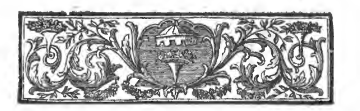
Ruë Saint Jacques,

Chez
Les Freres GUERIN, à S. Thomas d'Aquin.
DAVID l'aîné, à la Plume d'or.
DURAND, au Griffon.

M. DCC. XLVI.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.





PREFACE.

JE me suis proposé de suivre dans cet ouvrage la même méthode que dans mes Elémens de Géometrie : J'ai taché d'y donner les regles de l'Algebre dans un ordre que les Inventeurs eussent pû suivre. Nulle vérité n'y est présentée sous la forme de Theoremes, toutes semblent être découvertes en s'éxerçant sur les Problêmes que le besoin ou la curiosité ont fait entreprendre de résoudre.

Des problêmes utiles au commerce comme ceux où il est question de partager des sommes entre différentes personnes à raison de leurs mises ou de quelques conventions faites entr'elles ; des regles d'alliage, &c. sont les pro-

blêmes que je ſuppoſe avoir occupé les premiers Algébriſtes.

Je commence par donner la ſolution d'un des plus ſimples de ces Problêmes, telle qu'on la peut trouver ſans avoir aucune teinture de l'Algébre. Il eſt aiſé de reconnoître dans cette ſolution que ſi la mémoire ſuffit à retenir tous les raiſonnemens par leſquels il faut paſſer pour y arriver, c'eſt que la ſuite de ces raiſonnemens n'eſt pas bien longue ; & l'on voit en même-tems que lorſqu'on s'éléve à des Problêmes qui en demandent une plus grande, il faut chercher à les écrire d'une maniere fort abrégée, il faut imaginer quelques ſignes à l'aide deſquels on puiſſe exprimer l'état où la difficulté eſt réduite à chaque pas qu'on fait pour la réſoudre. Cette maniere d'écrire les queſtions, eſt l'Algébre que je fais pour ainſi dire inventer au Lecteur.

Pour aller toujours du plus ſimple au plus compoſé, je ne propoſe d'abord que des queſtions numériques, parce que ce ſont celles qui fixent le plus l'eſprit des commençans. Après en avoir

résolu plusieurs qui ne différent les unes des autres que par les nombres donnés dans l'énoncé, on s'apperçoit aisément qu'il y a toujours une partie de l'opération qui se trouve commune dans chaque résolution, & qu'il seroit à souhaiter de ne faire qu'une seule fois : je saisis cette occasion d'expliquer la maniere de résoudre généralement les Problêmes, en employant au lieu des nombres donnés par les conditions, des lettres qui expriment toutes sortes de grandeurs : & je montre ensuite à tirer des solutions générales les solutions particulieres au moyen de la substitution des nombres à la place des lettres.

Parmi les différens Problêmes où j'employe des lettres au lieu de nombres, il s'en trouve d'assés compliqués pour ne pouvoir pas être résolus sans employer les regles d'addition, soustraction, multiplication & division : je montre alors comment on doit faire ces opérations. Je n'ai pas crû devoir les enseigner plûtôt, parce que les commençans les suivent avec peine & avec

dégoût lorſqu'on les leur enſeigne dans un tems où ils n'ont aucune idée des quantités ſur leſquelles ils operent.

La multiplication eſt de toutes ces opérations celle qui arrête ordinairement le plus les commençans, & dont l'explication embaraſſe le plus les maîtres ; ce principe qu'elle renferme, que deux quantités négatives donnent pour leur produit une quantité poſitive, eſt preſque toujours l'écueil des uns & des autres.

Pour éviter d'y tomber, je n'établis ce principe qu'après avoir fait faire des opérations dans leſquelles on a dû en remarquer la néceſſité. Je commence par enſeigner à multiplier une quantité compoſée de pluſieurs termes poſitifs & négatifs par un ſeul terme que je ſuppoſe toujours poſitif, parce que l'on ne s'accoutume pas ordinairement à conſidérer une quantité négative comme exiſtant ſeule. Cette multiplication étant expliquée, je paſſe à celle où le multiplicateur eſt auſſi bien que le multiplicande compoſé de pluſieurs termes poſitifs & négatifs, & je fais

voir facilement que cette opération n'eſt autre choſe que la premiere répétée autant de fois qu'il y a de termes dans le multiplicateur, & que ſuivant que les termes de ce multiplicateur ſont poſitifs ou négatifs, les produits qu'ils donnent doivent être ou ajoutés ou retranchés.

Par ce moyen je familiariſe les commençans avec la multiplication, ſans que j'aye ſeulement beſoin d'énoncer ces principes ordinaires, que *moins* par *plus* donne *moins*, *moins* par *moins* donne *plus*, &c. qui en préſentant à l'oreille une contradiction dans les mots, laiſſent preſque toujours croire qu'il y en a une dans la choſe.

On pourroit croire d'abord que je n'ai fait qu'éluder la difficulté, & je n'aurois fait réellement que l'éluder, ſi je ne parlois pas de la multiplication des quantités purement négatives, par d'autres quantités auſſi entierement négatives, opération dans laquelle on ne ſçauroit éviter la contradiction apparente dont je viens de parler. Mais je traite à fond de cette multiplication

après en avoir montré la néceſſité au Lecteur, en le conduiſant à un Problême où l'on eſt obligé de conſidérer des quantités négatives indépendamment d'aucunes quantités poſitives dont elles ſoient retranchées.

Lorſque je ſuis parvenu dans ce Problême au point où il s'agit de multiplier ou de diviſer des quantités négatives les unes par les autres, je prends le parti qu'ont ſans doute pris les premiers Analyſtes qui ont eu de ces opérations à faire, & qui ont voulu ſuivre une route entierement ſûre, je cherche une autre ſolution du Problême par laquelle je puiſſe éviter toute eſpéce de multiplication ou de diviſion de quantités négatives, par ce moyen j'arrive au réſultat ſans employer d'autres raiſonnemens que ceux ſur leſquels on ne peut former aucun doute; & je vois ce que doivent être ces produits ou quotients de quantités négatives que m'avoit donnés la premiere ſolution. Il n'eſt pas difficile enſuite d'en tirer ces principes ſi fameux que *moins* par *moins* donne *plus*, &c.

Je délivre ainsi ces principes de tout ce qu'ils ont de choquant, & le Lecteur parvient en même-tems à connoître la nature des solutions négatives des Problêmes, il apprend cette vérité si utile, que lorsque dans une solution on arrive à trouver l'inconnue négative, elle doit être prise dans un sens opposé à celui suivant lequel on l'avoit employée en exprimant les conditions du Problême.

La premiere Partie de cet ouvrage traite uniquement des équations du premier dégré, soit à une, soit à plusieurs inconnues, & de toutes les opérations que demandent ces équations, tant pour arriver à leur résolution, que pour la rendre aussi simple qu'elle puisse être. Telle est par exemple la regle qu'il faut suivre pour trouver le plus grand commun diviseur laquelle naît de la nécessité de réduire une fraction à sa plus simple expression. Cette regle est expliquée d'une maniere nouvelle, & j'y ai ajouté plusieurs réfléxions qui la rendent applicable à des cas où la maniere ordinaire de la traiter pourroit

rebuter par la longueur des calculs, & ne pas toujours donner la quantité qu'on cherche.

Dans la feconde Partie je parle des Equations du fecond dégré, un Problême où il s'agit d'intérêt d'intérêts m'amene à une de ces Equations ; je l'ai choifi de nature à donner pour fes deux folutions deux nombres pofitifs, afin de mieux faire voir comment deux nombres différens réfolvent le même Problême. J'en ai ufé ainfi, de peur que les commençans qui ne regardent pas volontiers les racines négatives comme de véritables folutions, ne cruffent que le Problême n'avoit réellement qu'une folution.

Afin cependant de les accoutumer aux racines négatives, je donne enfuite un Problême dans lequel il y a une de ces racines, & telle cependant qu'aucun commençant ne peut s'empêcher de voir qu'elle fatisfait autant au Problême que la pofitive.

La réfolution des Equations que demandent ces Problêmes & ceux de même efpéce qu'on peut fe propofer, en-

gagent les Lecteurs à apprendre plusieurs opérations essentielles de l'Algébre, telles que les extractions des racines quarrées, la réduction des radicaux, leurs additions, soustractions, &c. opérations qu'on donne d'ordinaire au commencement des Elémens d'Algébre, mais que mon Plan exigeoit de placer en ce lieu.

De ces opérations je passe à un Problême dans lequel on doit employer plusieurs Equations du second dégré contenant chacune plusieurs inconnues, & je donne les moyens de réduire toutes ces Equations à une seule qui ne contienne qu'une inconnue. Je fais voir en même-tems que cette méthode n'est pas seulement propre aux Equations où les inconnues ne montent qu'au second dégré, mais qu'elle s'étend à tous les dégrés.

La troisiéme Partie a pour objet les Equations de tous les dégrés prises en général; je traite du nombre de leurs racines, des propriétés que les coefficiens du second, du troisiéme, &c. terme ont d'être ou la somme des racines,

ou celle des produits de ces racines, &c. Je tire de ces propriétés la fameuse regle de Descartes, pour trouver toutes les racines commensurables qui sont dans une Equation ; & comme cette méthode engage dans des calculs excessifs à cause du grand nombre de divisions qu'il faut tenter, je donne la méthode de Mr Newton, qui s'étend non-seulement aux racines commensurables ou diviseurs d'une dimension, mais aux diviseurs de tant de dimensions que l'on veut. Je ne me contente pas de donner la démonstration de cette méthode que Mr Newton avoit supprimée, mais je fais voir par quelle route il a pû la découvrir. C'est un avantage que je ne crois pas qu'on puisse trouver dans la démonstration que Mr s'Gravesande en a donnée (dans son *Specimen commentarii in arithmeticam universalem*, inséré à la fin de ses Elémens d'Algebre) & qui est la seule que je sache avoir été donnée malgré le grand nombre de traités d'Algebre qui ont parû depuis Mr Newton. J'ai appris cependant que le R. P. Jacquier, connu pour avoir com-

menté les recherches de Mr Newton les plus élevées avoit pris la peine de traiter celle-ci, mais ce qu'il a fait sur cette matiere n'est pas venu à ma connoissance.

Au reste dans cette Partie & dans celles qui suivent, je ne m'arrête pas, comme dans les deux précédentes, à montrer les Problêmes qui pourroient avoir conduit aux Equations que j'examine, parce que je ne crois plus avoir besoin de ce motif pour exciter la curiosité des Lecteurs. Ils ont dû suffisamment voir par les premiers Problêmes, de quelle importance il étoit de sçavoir résoudre toutes sortes d'Equations.

Je traite dans la quatriéme Partie des Equations de tous les dégrés lorsqu'elles n'ont que deux termes, ou lorsqu'en ayant trois, elles se réduisent à la méthode des Equations du second dégré par une simple transformation. J'enseigne par ce moyen aux commençans, un grand nombre d'opérations sur les quantités radicales de toute espéce, & je leur donne une connoissance entiere de l'élévation des puis-

ſances, & de l'extraction des racines.

Une regle qui eſt abſolument néceſſaire pour la réſolution complette de ces Equations, & qui a toujours été omiſe dans tous les Auteurs Elementaires, (excepté Mr s'Graveſande) c'eſt l'extraction des racines des quantités en partie commenſurables, & en partie incommenſurables: Mr Newton à qui on doit cette regle, l'ayant donnée à ſon ordinaire ſans démonſtration, je l'ai traitée ici comme un Problême; par ce moyen la découverte & la démonſtration marchent toujours de concert.

La Méthode de Mr Newton s'étend aux quantités numériques quelque ſoit l'expoſant de la racine, mais elle ne s'applique pas aux quantités litterales, lorſque cet expoſant paſſe le ſecond dégré; je ſupplée ce qui manque à cette Méthode, en donnant le procédé qu'il faut ſuivre pour les quantités littérales. De plus je fais voir que la Méthode de Mr Newton, pour les quantités numériques, peut induire en erreur dans quelques occaſions, c'eſt lorſque la racine

d'une quantité contient des fractions quoique la quantité n'en contienne point. Je montre ce qu'il faut faire alors pour remédier à cet inconvenient.

Mr s'Gravesande qui a commenté l'article de l'Arithmétique universelle de Mr Newton, où se trouve cette Méthode, n'a point remarqué les cas qui peuvent y échapper, & il n'a point donné la maniere de l'appliquer aux quantités littérales de tous les dégrés.

Toutes ces opérations supposant dans le cas d'une puissance quelconque la formule du Binome, j'en donne une démonstration nouvelle, & je montre les différentes utilités qu'on peut tirer de cette formule, pour trouver par approximation toutes sortes de quantités composées à volonté de radicaux, de fractions, &c. ce qui peut préparer les commençans à l'analyse de l'infini.

La cinquiéme Partie traite des Equations du troisiéme & du quatriéme dégré qui ont tous leurs termes, c'est-à-dire, toute la complication qu'elles peuvent avoir. Je donne d'abord la solution générale des Equations du troi-

ſiéme dégré, & je fais voir enſuite les Equations particulieres, où cette ſolution n'apprend point la valeur de l'inconnue, ce qui forme le cas qu'on appelle irréductible. Dans ces Equations au défaut des racines exactes, j'apprends à en trouver par approximation; je donne pour y parvenir une méthode nouvelle beaucoup plus ſimple que celles qui ont parû juſqu'à préſent. Par cette méthode dès la premiere opération, j'ai la valeur de la racine cherchée à un millieme près, & à la ſeconde à un millionieme, & ainſi de ſuite.

Je paſſe de-là aux Equations du quatriéme dégré, & après avoir donné leur réſolution générale, Je fais voir que cette réſolution, ainſi que celle des Equations du ſecond dégré, a cet avantage ſur la réſolution des Equations du troiſiéme, qu'une ſeule & même formule peut à l'aide des ſignes plus & moins exprimer toutes les racines de l'Equation. Je démontre auſſi, ce que tous les Auteurs Elémentaires n'ont fait que ſuppoſer, que les quatre racines d'une Equation du quatriéme dégré, ſont

toujours ou toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires, ou deux réelles, & deux imaginaires ; c'eſt-à-dire, que je prouve que les racines imaginaires des Equations du quatriéme dégré, peuvent, ainſi que celles du ſecond, être regardées comme compoſées d'une partie réelle, & d'une partie qui eſt la racine quarrée d'une quantité négative.

La réſolution des Equations du quatriéme dégré étant fondée ſur celle des Equations du troiſiéme, elle a de même que ces Equations cet inconvénient, que dans un cas on ne ſçauroit avoir les racines que par approximation. Je donne une maniere bien ſimple de trouver cette approximation en employant celle que j'avois donnée précédemment pour les Equations du troiſiéme dégré.

Quant aux Equations qui paſſent le quatriéme dégré, je ne donne rien pour leur réſolution en général, parce que juſqu'à préſent on n'a pû y parvenir quelques efforts qu'ayent fait les Analyſtes. L'on eſt réduit, excepté quelques cas particuliers que j'ai traités, pour la plûpart, dans la troiſiéme & quatriéme

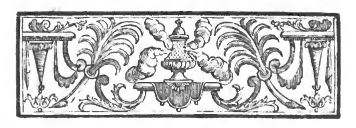
partie, à de ſimples approximations, & comme ces approximations ſont beaucoup plus faciles lorſqu'on eſt aidé de la Géometrie, je remets à traiter de ces Equations, lorſque j'enſeignerai la Theorie des lignes courbes.

On devoit s'attendre après ce que j'avois dit en annonçant mes Elémens d'Algebre, à y trouver des applications de cette ſcience à la Géometrie, j'ai crû cependant devoir les réſerver pour un autre ouvrage. Il m'a parû qu'en donnant un traité entier de pure Algebre, c'étoit offrir aux commençans les moyens de s'y fortifier davantage, & qu'ils gagneroient à ne l'appliquer à la Géometrie, que lorſque les opérations Analytiques ne leur couteroient plus. J'eſpere que les Principes qu'ils trouveront dans cet ouvrage, les mettront en état de ſurmonter les plus grandes difficultés qu'ils rencontreront dans la haute Géometrie.

Au reſte, je ne ſuppoſe pour l'intelligence de ce traité, que les opérations principales de l'Arithmetique, parmi leſquelles je compte la regle de trois,

trois ; ceux qui auront lû mes Elemens de Géometrie posséderont la théorie des proportions autant qu'il est nécessaire pour entendre tout ce que je dis ici. J'avois d'abord compté donner dans le même Livre tant les Elemens d'Arithmetique que ceux d'Algebre, & je n'aurois pas manqué alors de traiter des proportions plus à fond que je n'ai fait dans mes Elemens de Géometrie, mais l'ordre que j'ai suivi m'a parû demander de traiter séparément ces deux Sciences. En effet, voulant me rapprocher autant qu'il est possible du chemin des Inventeurs, j'ai dû supposer l'Arithmetique familiere à ceux qui vouloient pénetrer dans l'Algebre.

ELEMENS



ELEMENS D'ALGEBRE.

PREMIERE PARTIE.

De la Méthode Algebrique d'exprimer les Problêmes par des Equations, & de la résolution des Equations du premier dégré.



ARMI les différens Problêmes dont les premiers Mathématiciens qui ont eu le nom d'Algebristes se sont occupés, je choisis celui-ci, comme un des plus propres à faire voir comment ils sont parvenus à former la Science qu'on nomme Algebre ou Analyse.

I.

Partager une somme, par exemple 890 ℔

Exemple d'un Problème semblable à ceux que les premiers Algebristes ont pû se proposer.

a trois personnes, ensorte que la premiere ait 180 ℔ de plus que la seconde, & la seconde, 115 ℔ de plus que la troisiéme.

Voici d'abord comme j'imagine qu'aura raisonné un homme, qui, sans aucune teinture de l'Algebre, sera parvenu à résoudre ce Problême.

Solution de ce Problême telle qu'on la pourroit trouver sans Algebre.

Il est évident que si on connoissoit une des trois parts, on connoîtroit aussi-tôt les deux autres, supposons, par exemple, qu'on connoisse la troisiéme qui est la plus petite, il faudra y ajouter 115 ℔, & l'on aura la valeur de la seconde; ensuite pour avoir la premiere, il faudra ajouter 180 ℔ à cette seconde, ce qui revient au même que si on ajoutoit 180 ℔ plus 115 ℔ ou 295 ℔ à la troisiéme.

Quelle que soit la troisiéme part, nous sçavons donc que cette part, plus elle-même avec 115 ℔ plus encore elle-même avec 295 ℔ doit faire une somme égale à 890 ℔.

De-là, il suit que le triple de la plus petite part, plus 115 ℔ plus 295 ℔ ou en une fois plus 410 ℔ est égal à 890 ℔.

Or, si le triple de la part qu'on cherche plus 410 ℔ est égal à 890 ℔, il faut donc que ce triple de la part qu'on cherche soit plus petit que 890 ℔ de 410 ℔. Donc ce triple de la plus petite part est égal à 480 ℔. Donc la plus petite part est égale à 160 ℔.

La seconde sera par conséquent de 275 ℔, & la premiere ou la plus grande de 450 ℔.

C'est vraisemblablement ainsi que les pre-

miers Algebristes ont raisonné quand ils se sont proposés de pareilles questions, sans doute qu'à mesure qu'ils avançoient vers la solution d'une question, ils chargeoient leur memoire de tous les raisonnemens qui les avoient conduits au point où ils en étoient, & lorsque les questions n'étoient pas plus compliquées que la précédente, il n'y avoit pas de quoi se rebuter, mais dès que leurs recherches ont offert plus d'idées à retenir, il a fallu qu'ils cherchassent une maniére plus courte de s'exprimer, qu'ils eussent quelques signes simples, avec lesquels quelqu'avancés qu'ils fussent dans la solution d'un Problême, ils pussent voir d'un coup d'œil ce qu'ils avoient fait & ce qui leur restoit à faire. Or l'espece de langage particulier qu'ils ont imaginé pour cela, c'est l'Algebre.

II.

Pour mieux donner les principes de cette Science, nous allons reprendre la même question, nous écrirons en langage ordinaire les raisonnemens que l'Algebriste fait pour résoudre son Problême & en caractères Algebriques, ce qu'il lui suffit d'écrire pour aider sa memoire.

Méthode Algebrique d'exprimer le Problême précedent.

La plus petite ou la troisiéme part, quelle qu'elle soit, je l'exprime par une seule lettre qui sera par exemple. x

La seconde sera par consequent x plus 115, ce que j'écris ainsi . . . . $x+115$, choisissant le signe $+$ qu'on prononce *plus* pour désigner l'Addition des deux quantités entre lesquelles on le place.

Le signe + indique l'addition.

Quant à la premiere part ou la plus grande,

comme elle surpasse la seconde de 180 elle sera donc exprimée par .... $x+115+180$

Ajoutant ces trois parts, on aura.......
.... $3x+115+115+180$
ou en réduisant .... $3x+410$

Le signe = marque l'égalité.

Mais cette somme des trois parts doit égaler 890 ℔ ce que j'exprime ainsi.. $3x+410=890$

Employant le caractere = qui se prononce *égal* pour exprimer l'égalité des deux quantités entre lesquelles on le place.

Une Equation est l'égalité de deux quantités.

On resout une Equation lorsqu'on trouve la valeur de l'inconnue qu'elle renferme.

La question, par ce Calcul, est donc changé en une autre, où il s'agit de trouver une quantité dont le triple étant ajouté avec 410 fasse 890 Trouver la résolution de semblables questions, c'est ce qu'on appelle résoudre une Equation, l'Equation dans ce cas ci est $3x+410=890$ on l'appelle ainsi, parce qu'elle indique l'égalité de deux quantités, résoudre cette Equation, c'est trouver la valeur de l'inconnue x par cette condition que son triple plus 410 fasse 890

III.

Résolution de l'Equation qui exprime le problême précédent.

Pour résoudre cette Equation, voici comment l'Algebriste raisonne, & comment il écrit ses raisonnemens. L'Equation à résoudre....
.... $3x+410=890$
m'apprend qu'il faut ajouter..... 410 à $3x$ pour faire la somme de 890, donc $3x$ sont moindres que 890 de 410, ce que j'écris ainsi .... $3x=890-410$

Le caractere − indique la Soustraction.

Prenant le caractere — qui se prononce *moins* pour faire ressouvenir que la quantité qu'il précede doit être retranchée de celle qu'il suit.

De cette nouvelle Equation $3x=890-410$

on tire, en retranchant en effet 410 de 890, cette autre Equation $3x=480$.

Mais si trois x valent 480, un x vaut donc le tiers de 480 ou 160 ce que j'écris ainsi, $x=\frac{480}{3}=160$, & la question est résolue, puisqu'il suffit de connoître une des parts pour connoître les autres.

I V.

Si on avoit voulu résoudre la question en commençant par chercher la plus grande part, on l'auroit pû de même. Autre solution du Problême précédent.

Voici comment on s'y seroit pris.

Soit cette premiere part . . . . y

La seconde ayant 180 de moins sera $y-180$

Et la troisiéme ayant 115 de moins que la seconde sera . . . . $y-180-115$

Or la somme de ces trois quantités est . . . . $3y-180-180-115$ c'est-à-dire . . . . $3y-475$

Mais cette somme doit égaler 890

On a donc l'Equation $3y-475=890$ qui apprend que $3y$ surpassent 890 de 475, puisqu'il faut retrancher 475 de $3y$ pour avoir 890. Donc $3y=890+475$ ou $3y=1365$.

Donc y ou la plus grande part $=455$ comme ci-dessus.

V.

Si dans le Problême il avoit fallu partager une somme plus ou moins grande que celle qu'on a employée, & que les différences eussent été d'autres nombres que ceux dont on s'est servis, il est évident qu'on l'auroit résolu de la même maniere. Supposons, par exemple, que

le Problême eut été énoncé ainsi.

Autre exemple du Problême précédent.

Partager 9600 à quatre personnes, ensorte que la premiere ait 300 de plus que la seconde, & la seconde 250 de plus que la troisiéme, & la troisiéme 200 de plus que la quatriéme.

On auroit raisonné de la maniere suivante;

En nommant la quatriéme part x

La troisiéme sera . . . . . . $x+200$

La seconde . . . . $x+200+250$

La premiere . . . . $x+200+250+300$.

Or la somme de toutes ces parts doit être égale à 9600. On a donc l'Equation.

$$4x+1400=9600.$$

Pour résoudre cette Equation, je remarque comme dans la précédente, que si $4x$ ne sont égaux à 9600 que lorsqu'on leur a ajouté 1400, il faut qu'ils soient égaux à ce qu'il reste de 9600 lorsqu'on en a retranché 1400, ce que l'on écrit ainsi . . $4x=9600-1400$

ou $4x=8200$.

Mais si quatre x sont égaux à 8200, un x vaut donc le quart de 8200, c'est-à-dire que $x=\frac{8200}{4}=2050$, la plus petite part x étant connue les autres se trouvent tout de suite, la troisiéme $=2250$, la seconde $=2500$, & la premiere $=2800$.

VI.

Le Problême pourroit être encore plus varié & dépendre toujours des mêmes principes; supposons, par exemple, qu'il fut énoncé ainsi.

Troisiéme exemple du probleme précédent.

Partager 5500 en deux parties de maniere que la premiere ait un tiers de plus que la se-

conde, plus encore 180.

Voici comment on le résoudroit.

Soit la seconde part x

On aura pour la premiere $x+\frac{1}{3}x+180$.

Or comme leur somme doit égaler 5500, on a donc l'Equation $2x+x+\frac{1}{3}x+180=5500$. Pour résoudre cette Equation je commencerai par ajouter $2x$ avec $\frac{1}{3}x$ ce qui me donne $\frac{7}{3}x$ parce que deux entiers valent six tiers, & que par conséquent ces deux entiers avec un tiers font sept tiers. Donc l'Equation précédente se réduit à . . . . $\frac{7x}{3}+180=5500$ qui deviendra par le même raisonnement que dans les exemples précédens $\frac{7x}{3}=5500-180$

ou $\frac{7x}{3}=5320$.

Or si le tiers de $7x$ vaut 5320 les $7x$ entiers valent donc trois fois davantage, ce que l'on écrit ainsi . . . . $7x=5320\times 3$. Employant le signe $\times$ qui se prononce *par* pour désigner la multiplication des deux quantités qu'il sépare.

Le signe $\times$ indique la multiplication.

Ensuite au lieu de $7x=5320\times 3$ il suffit d'écrire $7x=15960$ que l'on a en multipliant en effet 5320 par 3.

Et par le moyen de cette nouvelle Equation on a $x=\frac{15960}{7}=2280$ valeur de la seconde part.

La premiere part sera aisée à trouver ensuite, puisqu'il ne faudra qu'ajouter à cette quantité 2280 son tiers 760 & de plus 180, ainsi qu'on l'avoit proposé, & l'on aura 3220 pour la premiere part.

Les commençans pourront s'exercer à va-

rier encore davantage l'enoncé du Problême précédent, & à le résoudre dans les différens cas qu'ils imagineront, ils seront récompensés de leurs peines par la facilité qu'ils acquerront. Afin de les aider davantage, je vais donner un autre Problême qui a encore beaucoup de rapport avec le précédent.

VII.

Nouveau Problême de même nature que le précédent.

Trois Marchands font une Société, le premier fournit 17000 ₶ *le second* 13000 ₶, *le troisiéme* 10000; *comme ils ont besoin de quelqu'un qui se donne les soins que demande leur commerce, celui qui n'a mis que* 10000 ₶ *se charge de toutes les affaires, à condition qu'il tirera de plus que les autres* 3 *pour* 100 *de tout le gain qui se fera: Il arrive que ce gain monte à* 100000 ₶ *on demande ce qu'il faut qu'ils en ayent chacun.*

Soit la part du premier x

Le second ayant mis moins dans la raison de 13 à 17 doit avoir une somme moindre dans cette même raison, c'est-à-dire seulement . . . . $\frac{13}{17}x$

Le troisiéme en supposant qu'il n'eut qu'à raison de sa mise auroit les $\frac{10}{17}$mes du premier, mais devant avoir de plus 3 pour 100 sur tout, c'est-à-dire 3000 ₶ sa part sera. . . . . $\frac{10}{17}x+3000$

Et comme la somme de ces trois parts doit être 100000 ₶ on aura . . . . . $x+\frac{13}{17}x+\frac{10}{17}x+3000=100000$

ou $x+\frac{13}{17}x+\frac{10}{17}x=97000$

Pour dégager l'inconnue de cette équation soit considéré que $x+\frac{13}{17}x+\frac{10}{17}x$ ou $\frac{17}{17}x+\frac{13}{17}x+\frac{10}{17}x$

ne signifie autre chose que $\frac{40}{17}x$ on a donc $\frac{40}{17}x = 97000$ ou $40x = 97000 \times 17$, ou $40x = 1649000$ ou $x = \frac{1649000}{40} = 41225$.

La part du premier étant trouvée celle du second exprimée par $\frac{13}{17}x$ sera $\frac{13}{17} \times 41225$, c'est-à-dire 31525, celle du troisiéme exprimée par $\frac{10}{17}x + 3000$ sera $\frac{10}{17} \times 41225 + 3000 = 27250$.

VIII.

La solution analytique d'un Problême a deux parties.

Dans la premiere on exprime ce Problême par une Equation.

Par ces deux Problêmes les Lecteurs entrevoyent ce que c'est que l'Algebre, & ils apprennent qu'en géneral la solution d'un Problême est composée de deux parties; dans la premiere on nomme par une lettre comme x ou y &c. la quantité inconnue qu'on cherche, ou une de celles qui étant connue, détermineroit les autres, on tâche ensuite d'arriver à une Equation où l'inconnue se trouve, ce qui se fait en exprimant de deux manieres différentes une même quantité.

Dans la seconde on résout cette Equation.

Dans la seconde partie il s'agit de dégager l'inconnue de l'Equation.

La premiere de ces deux parties est difficile à réduire en préceptes clairs pour les commençans, ce ne peut-être que par des exemples qu'on la fasse bien sentir.

Quant à la seconde on la peut beaucoup plus aisément expliquer d'une maniere génerale.

IX.

Les Equations du premier degré sont celles, où l'inconnue n'est

Dans les questions que nous venons de résoudre on est arrivé à des Equations dans lesquelles l'inconnue ne se trouvoit pas autrement engagée que par la multiplication ou la division de nombres connus; on appelle ces

multipliée ou divisée que par des quantités connues.

sortes d'Equations, Equations du premier dégré, telles sont $2x - 10 = 56$, $\frac{2}{3}x + 15 = x - \frac{1}{5}x + 30$ &c. Et les Problêmes qui conduisent à ces Equations sont nommés des Problêmes du premier dégré.

On les appelle ainsi pour les distinguer de ceux dans lesquels l'inconnue seroit ou quarrée, * ou cubée, &c. qu'on dit être, aussi bien que leurs Equations, du second dégré si l'inconnue est quarrée, du troisiéme si l'inconnue est cubée &c.

Qu'on demandât, par exemple un nombre dont le triple étant ajouté avec le quarré, donnât 65 le Problême qu'il faudroit résoudre alors seroit du second dégré. Et l'Equation $3x + xx = 65$ (dans laquelle xx désigne le quarré de x) qui exprimeroit les conditions de ce Problême seroit une Equation du second dégré.

On n'a pû parvenir à la résolution de ces Equations qu'après s'être exercé long-tems aux Equations du premier dégré. Nous allons donc chercher toutes les regles que demandent celles-ci.

X.

Pour les trouver reprenons d'abord l'Equation $4x + 1400 = 9600$ traitée Art. V, laquelle

* On doit avoir vû en Arithmetique qu'un nombre est quarré ou cubé, suivant qu'il est multiplié une ou deux fois par lui-même. On quarre 7 par exemple lorsque, en le multipliant par lui-même, on en forme 49, de même on le cube lorsque le multipliant deux fois par lui-même on en forme 343.

est composée des trois termes $4x$, 1400, 9600, (on appelle ainsi toutes les parties d'une Equation separées les unes des autres par les signes $+$ ou $-$) & remarquons que par le même raisonnement, par lequel nous en avons tiré que $4x=9600-1400$, nous pourrons dans toutes sortes d'Equations prendre quelque terme que ce soit précedé du signe $+$ & le passer de l'autre côté du signe $=$ en lui donnant le signe $-$. Qu'on ait par exemple $50+\frac{10}{3}x=5x+30$ il sera permis de passer le terme $\frac{10}{3}x$ en $-$ de l'autre côté & écrire ainsi l'Equation $50=5x+30-\frac{10}{3}x$, car on peut dire comme dans l'Art. V. que puisqu'il faut ajouter $\frac{10}{3}x$ à 50 pour être égal à la quantité $5x+30$, il faut donc que 50 soit plus petit que $5x+30$ de la quantité $\frac{10}{3}x$ c'est-à-dire qu'il soit égal à $5x+30-\frac{10}{3}x$.

Les termes d'une Equation sont les parties séparées par les signes $+$ ou $-$

De la même maniere qu'on a vû Art. III. que l'Equation $3y-475=890$ se changeoit en $3y=890+475$, on verra qu'en géneral les termes qui sont en $-$ d'un côté du signe d'Egalité peuvent être passés en $+$ de l'autre. Qu'on ait par exemple $32-6x=9x+119$ on en tirera $32=6x+9x+119$. Car si 32 doit être diminué de $6x$ pour égaler $9x+119$, il faut qu'il soit plus grand de $6x$ que cette quantité, c'est-à-dire qu'il soit égal à $6x+9x+119$.

XI.

Voilà donc un principe géneral pour toutes les Equations, c'est que les termes que l'on voudra pourront être passés d'un côté de l'Equation à l'autre, en observant de changer leurs signes. Or ce principe est d'une utilité infinie

Tout terme peut être passé d'un côté de l'Equation à l'autre en changeant de signe.

en ce qu'il épargne beaucoup de raisonnemens.

XII.

Par son moyen on peut toujours changer une Equation en une autre, où l'on ait d'un côté du signe $=$, c'est-à-dire dans l'un des membres de l'Equation les termes affectés de x & de l'autre côté du signe $=$ c'est-à-dire dans l'autre membre de l'Equation tout ce qui est entierement connû.

On appelle membres d'une Equation ses deux parties séparées par le signe =

Que l'on ait par exemple l'Equation $8x + 30 = \frac{5}{3}x + 250$; j'en tire $8x - \frac{5}{3}x = 250 - 30$; que l'on ait $60 - \frac{5}{4}x = 250 - \frac{7}{3}x$, on en tire $\frac{7}{3}x - \frac{5}{4}x = 250 - 60$ & ainsi des autres.

XIII.

Lorsqu'après les transpositions nécessaires, on aura fait passer tous les termes affectés de x d'un côté & les termes connus de l'autre; ce qui se présente le plus naturellement c'est de réduire chacun des deux membres de l'Equation à sa plus simple expression. Qu'on ait par exemple $8x - \frac{5}{3}x = 250 - 30$ on en tire aussitôt $\frac{19}{3}x = 220$, en retranchant en effet 30 de 250, & en retranchant aussi $\frac{5}{3}x$ de $8x$ ou de $\frac{24}{3}x$ qui lui est égal.

Qu'on ait $\frac{7}{3}x - \frac{5}{4}x = 250 - 60$ on la change en $\frac{13}{12}x = 190$ à cause qu'en reduisant $\frac{7}{3}x$ & $\frac{5}{4}x$ au même dénominateur on a $\frac{28}{12}x$ & $\frac{15}{12}x$ dont la différence est $\frac{13}{12}x$, & qu'en retranchant 60 de 250 il reste 190.

XIV.

Par de semblables réductions qui sont toujours faciles à ceux qui sçavent l'Arithmetique on changera toutes les Equations du premier

dégré, quelques composées qu'elles soient en d'autres qui n'auront que deux termes, l'un étant composé d'un certain nombre d' x entier ou rompû, l'autre étant un terme entierement connû, telles que sont les Equations $4x = 8200$, $\frac{7}{3}x = 53200$ & résolues dans les Articles V. & VI.

Rappellons nous maintenant ce que nous avons dit sur ces Equations, & nous en tirerons des principes généraux pour toutes les autres.

De l'Equation $4x = 8200$ nous avons tiré $x = \frac{8200}{4}$ parce qu'il s'ensuivoit de ce que quatre x valoient 8200, qu'un x ne pouvoit valoir que le quart de cette somme, de ce raisonnement & de ceux que l'on formeroit pareillement pour les autres nombres d'x, on tire ce principe général, qu'on peut ôter le multiplicateur qui affecte l'inconnue dans un des membres de l'Equation, en le faisant servir de diviseur à l'autre membre.

Maniere de faire évanouir le multiplicateur qui affecte l'inconnue.

XV.

De l'Equation $\frac{7}{3}x = 53200$ nous avons tiré $7x = 3 \times 53200$ en remarquant que si le tiers de $7x$ vaut 53200, $7x$ entiers doivent valoir trois fois davantage. Delà on forme ce principe général, que pour faire disparoître le diviseur qui affecte l'inconnue dans un membre de l'Equation, on n'a qu'à le faire servir de multiplicateur à l'autre membre.

Maniere de faire disparoitre le diviseur qui affecte l'inconnue.

XVI.

Avec ces regles on est en état de résoudre toutes sortes d'Equations du premier dégré.

Pour exercer les Commençans : voici quelques exemples.

Exemples d'Equations du premier dégré résolues par les principes précédens.

$\frac{6}{5}x - 90 + \frac{2}{3}x = \frac{4}{3}x - 82$ se change par la transposition en $\frac{6}{5}x + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}x = 90 - 82$ ou en réduisant $\frac{6x}{5} - \frac{2}{3}x = 8$ ou $\frac{18}{15}x - \frac{10}{15}x = 8$ ou $\frac{8}{15}x = 8$ ou $8x = 8 \times 15$ ou en dernier lieu $x = 15$.

De même $\frac{2}{7}x + 9 = \frac{1}{3}x - 10$ devient en transposant $\frac{1}{3}x - \frac{2}{7}x = 10 + 9$ ou $\frac{1}{3}x - \frac{2}{7}x = 19$ ou $\frac{1}{21}x = 19$ ou $x = 359$.

Enfin $\frac{2}{9}x - 40 - \frac{1}{4}x = 60 - \frac{7}{5}x$ donne en transposant $\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}x = 100$, qui en réduisant d'abord $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{4}$ au même Dénominateur devient $\frac{7}{5}x - \frac{1}{36}x = 100$, & qui en réduisant $\frac{7}{5}$ & $\frac{1}{36}$ au même Dénominateur devient ensuite $\frac{247}{180}x = 100$ ou $x = \frac{18000}{247}$

XVII.

Au lieu de réduire toutes les fractions au même Dénominateur, on peut faire disparoître l'un après l'autre tous les Diviseurs de l'Equation donnée par la méthode suivante qui a dû être bien-tôt imaginée par les premiers qui ont manié ces sortes d'Equations.

Maniere de faire évanouir les fractions d'une Equation.

Soit repris l'exemple précédent $\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}x = 100$, il est clair que si on multiplie les deux membres de cette Equation par 9, les deux produits seront les mêmes ; car des quantités égales multipliées par le même nombre doivent donner le même produit, on aura par cette multiplication $\frac{18}{9}x - \frac{9}{4}x + \frac{63}{5}x = 900$ qui, à cause que $\frac{18}{9}x = 2x$, se ré-

duit à $2x - \frac{9}{4}x + \frac{63}{5}x = 900$, dans laquelle le Diviſeur 9 a diſparu, & l'on voit bien que cela devoit arriver néceſſairement, car $\frac{2}{9}$ de quelque quantité que ce ſoit multipliés par 9 doivent donner 2 entiers de cette même quantité. Pour faire diſparoître de même 4, il faudra multiplier tous les termes de l'Equation par 4, en obſervant ſeulement pour le terme $\frac{9}{4}x$ que la multiplication par 4 ſe fera en ôtant le 4 de deſſous. Ainſi l'on aura $8x - 9x + \frac{252}{5}x = 3600$ ou $\frac{252}{5}x - x = 3600$, qui, multipliant les deux membres par 5; deviendra $252x - 5x = 18000$ ou $247x = 18000$ ou $x = \frac{18000}{247}$

Le principe géneral qu'on tire de-là, c'eſt que pour faire diſparoître un Diviſeur d'un terme, il faut multiplier tous les autres termes par le Diviſeur, & l'ôter du terme où il eſt.

XVIII.

Autre méthode par laquelle on les fait tous évanouir à la fois.

On peut trouver une maniere de faire diſparoître tous les Diviſeurs à la fois, en remarquant que ſi on multiplie tous les termes par un même nombre qui puiſſe ſe diviſer par chacun de ces Diviſeurs, chaque terme ſe réduira. Multiplions par exemple l'Equation $\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}x = 100$ par 180 qui peut ſe diviſer par 9, par 4 & par 5; on aura $\frac{360}{9}x - \frac{180}{4}x + \frac{1260}{5}x = 18000$ ou $40x - 45x + 252x = 18000$ ou $247x = 18000$.

Or pour trouver ce nombre qui puiſſe ſe diviſer par tous les Diviſeurs, il ne faut que multiplier ſucceſſivement ces Diviſeurs les uns par les autres. Qu'on ait, par exemple,

$\frac{7}{3}x + \frac{1}{5}x = 160 - \frac{2}{7}x$ dont on veuille faire évanouir les Diviſeurs, je multiplie d'abord 3 par 5, & je multiplie enſuite leur produit 15 par 7, ce qui me donne 105 pour le nombre qui eſt diviſible par 3, 5, 7; ce nombre trouvé, je m'en ſers pour multiplier toute l'Equation, ce qui me donne $\frac{735}{3}x + \frac{105}{5}x = 16800 - \frac{210}{7}x$ ou $245x + 21x = 16800 - 30x$

Pour abreger encore cette operation, au lieu de former le produit 105 des trois Diviſeurs, on peut ſe contenter d'écrire ainſi ce produit $3 \times 5 \times 7$ la multiplication donne alors $\frac{7 \times 3 \times 5 \times 7}{3}x + \frac{7 \times 3 \times 5}{5}x = 160 \times 3 \times 5 \times 7 - \frac{7 \times 5 \times 3 \times 2}{7}x$ dans laquelle on voit tout de ſuite que le nombre 3 doit s'en aller du numerateur de la premiere fraction, puiſque la diviſion par 3 doit être détruite en faiſant la multiplication par 3, & de même du 5 & du 7, qui ſont à la fois aux numerateurs & aux diviſeurs des autres fractions.

Par ce moyen on arrive à l'Equation $7 \times 5 \times 7x + 7 \times 3x = 160 \times 3 \times 5 \times 7 - 2 \times 3 \times 5x$ qui en faiſant les multiplications indiquées par les ſignes $\times$ donne $245x + 21x = 16800 - 30x$ délivrée de fractions.

XIX.

Pour ſuivre le plus vraiſemblablement qu'il eſt poſſible l'ordre des inventeurs, nous ne nous arrêterons pas maintenant à approfondir davantage la méthode de dégager l'inconnue, mais nous reviendrons à la maniere de mettre les Problêmes en équations; la réſolution des équations a pû, indépendamment des Problêmes auſquelles elles ont rapport, occuper les Algebriſtes

Algebriftes lorfque cette Science a été avancée à un certain point, mais il eft à préfumer que ceux qui en ont jetté les fondemens, n'ont examiné les Equations qu'à l'occafion des Problêmes dont elles étoient, pour ainfi dire, le dénouement. D'ailleurs il fe trouve quelquefois dans les Equations des complications dont on ne fe feroit pas douté, fi la nature des Problêmes qu'on cherchoit ne les avoit pas amenées.

Nous ne pouvons rien dire ici de plus net, fur la maniere génerale de mettre les Problêmes en équations, que ce que nous avons dit art. VIII. mais nous allons donner plufieurs exemples qui accoutumeront les Commençans à cette recherche.

Pour payer un certain nombre d'Ouvriers fur le pied de 5 ℔ *chacun, il manque* 8 ℔ *à un homme qui les fait travailler, mais en ne leur donnant chacun que* 2 ℔ *il lui refte* 3 ℔, *on demande combien cet homme a d'argent.* Troifiéme Problême.

Soit x le nombre de livres que poffede cet homme, donc $x+8$ eft la fomme qui peut fatisfaire tous les Ouvriers fur le pied de 3 ℔ & comme le nombre des Ouvriers doit être trois fois plus petit que celui qui exprime cette fomme, il fera exprimé par le tiers de $x+8$, ce qu'on écrira ainfi, $\frac{x+8}{3}$; car en Algebre comme en arithmetique une barre horizontale indique toujours la divifion de la quantité fuperieure par l'inférieure. On employe une barre en algebre comme en arithmetique pour indiquer la Divifion.

De plus puifqu'il refte 3 ℔ quand on ne donne que 2 ℔ à chaque Ouvrier, $x-3$ eft donc la fomme fuiffifante pour payer tous

ces Ouvriers à raison de 2 ℔ chacun. Donc $\frac{x-3}{2}$ peut exprimer le nombre d'Ouvriers, mais puisque nous avons deux valeurs du même nombre, il faut qu'elles soient égales, le Problême est donc réduit à la résolution de l'Equation $\frac{x-3}{2} = \frac{x+8}{3}$

Pour le résoudre nous commencerons par faire disparoître le diviseur 2 du membre $\frac{x-3}{2}$ de cette Equation, en multipliant l'autre membre par ce même nombre 2, ce qui changera l'Equation en $x-3 = \frac{2x+16}{3}$; car il est évident que le double de $\frac{x-3}{2}$ est $x-3$ & que le double de $\frac{x+8}{3}$ sera $\frac{2x+16}{3}$ par la même raison que $2x+16$ est le double de $x+8$. On fera ensuite évanouir le diviseur 3 de l'Equation $\frac{2x+16}{3} = x-3$, en multipliant le second membre par 3 & en l'ôtant du premier, ce qui donnera $2x+16 = 3x-9$ ou $x = 25$.

Si on veut sçavoir à présent combien il y a d'Ouvriers, il faut prendre une des deux expressions $\frac{x-3}{2}$ ou $\frac{x+8}{3}$ qu'on a trouvées pour ce nombre, $\frac{x-3}{2}$ par exemple. Puisqu'on sçait maintenant que $x = 25$, $x-3$ sera donc 22, $\frac{x-3}{2}$ partant sera $\frac{22}{2} = 11$ nombre d'Ouvriers demandé.

XX.

Il est bon de remarquer à propos de l'Equation $\frac{x-3}{2} = \frac{x+8}{3}$, qu'il ne seroit pas permis pour y appliquer la regle de l'art. XI. de changer de côté & de signe les quantités -3 & $+2$, &

d'écrire ainsi l'Equation $\frac{x-8}{2} = \frac{x+3}{3}$, parce que nombre -3 n'est pas proprement un terme du premier membre, mais seulement un terme de son dividende $x-3$; la quantité de $\frac{x-3}{2}$ n'étant réellement qu'un seul terme de l'Equation, ainsi que $\frac{x+8}{3}$. Pour appliquer donc la regle de l'art. XI. il faudroit commencer par prendre, ainsi qu'il est indiqué par le nombre 2 qui est sous la premiere barre, la moitié de $x-3$ ce qui donneroit $\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$; ensuite il faudroit prendre, à cause du 3 qui est sous l'autre barre, le tiers de $x-8$ qui seroit $\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}$, égalant alors ces deux quantités on auroit l'Equation $\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$ dans laquelle on pourroit faire les transpositions qu'on voudroit.

XXI.

Autre solution du même Problême.

Le Problême précédent pourroit encore être résolu de la maniere suivante.

Que y exprime le nombre d'Ouvriers, $3y$ sera l'argent qu'il faudroit leur donner sur le pied de 3 ℔ chacun. Mais il manque 8 ℔ pour les satisfaire à ce prix : donc $3y-8$ est l'argent que possede celui qui les doit payer.

D'un autre côté $2y$ seroit ce qu'il faudroit pour payer ces Ouvriers à raison de 2 ℔, & il resteroit en ce cas 3 ℔. Donc $2y+3$ est une autre expression de l'argent que possede celui qui les doit payer.

Il faut donc égaler les deux quantités $2y+3$ & $3y-8$, ou ce qui revient au même, il faut résoudre l'Equation $2y+3=3y-8$ pour

avoir la valeur de y. Cette Equation étant résolue par les principes précédens, ce qui est fort facile, on aura 11 pour y, c'est-à-dire pour le nombre d'Ouvriers demandé.

XXII.

Quatriéme Probléme.

Un Courrier est parti d'un lieu, il y a 9 heures & fait 5 lieues en 2 heures, on envoye un autre Courrier après lui, dont la vitesse est telle qu'il fait 11 lieues en 3 heures; Il s'agit de sçavoir où ce second Courrier attrapera le premier.

Soit x le chemin que le second Courrier fera avant d'avoir attrapé le premier, il est évident que ce chemin doit être égal à celui que le premier Courrier avoit fait pendant ses 9 heures d'avance, plus au chemin que le même premier Courrier fait pendant le temps que marche le second Courrier. Pour trouver d'abord le chemin que le premier Courrier avoit fait pendant 9 heures, il faut faire cette proportion * ou regle de trois.

Comme 2 heures sont a 5 lieues ainsi 9 heures sont à un quatriéme terme qui, suivant les regles connues en Arithmetique, se trouvera en multipliant le second terme 5 de la proportion par le troisiéme 9, & en divisant leur produit par le premier 2; & qui sera par consequent $\frac{41}{2}$ nombre de lieues faites par le premier Courrier pendant les 9 heures.

* Je suppose ici, ou qu'on ait lû dans mes Elemens de Geometrie les Articles IX, X, &c. de la seconde Partie, dans lesquels on traite des proportions, ou qu'au moins on possede bien la regle de trois expliquée dans tous les livres d'Arithmetique.

Mais comme en Algebre on veut écrire toujours le plus courtement qu'il est possible ses operations, voici comment on dénote cette proportion; Maniere dont on exprime les proportions en Algebre.

heures	lieues	heures	lieues
2 :	5 =	9 :	$\frac{45}{2}$

Les signes : servant, l'un à comparer 2 à 5, & l'autre 9 à $\frac{45}{2}$ & le signe = servant à marquer l'égalité, qui doit être entre le rapport de 2 à 5 & celui de 9 à $\frac{45}{2}$.

Pour trouver ensuite le chemin que le même Courrier fera pendant le temps que le second Courrier fera le chemin x, on cherchera premierement le temps qu'il faut au second Courrier pour faire le chemin x, ce qui se trouvera par cette proportion;

heures	lieues	heures	lieues
11 :	3	= x :	$\frac{3x}{11}$

par laquelle on apprend que sans s'embarrasser du nombre de lieues contenues dans x, il suffit de multiplier ce nombre par 3 & de le diviser par 11, pour avoir le nombre d'heures qu'il faut au second Courrier pour le parcourir.

Sans faire attention maintenant si le nombre d'heures exprimé par $\frac{3}{11}x$ est connû, ou s'il est inconnu, on fera cette proportion.

heures	lieues	heures	lieues
2 :	5 =	$\frac{3}{11}x$	: $\frac{15}{22}x$

dont le quatriéme terme $\frac{15}{22}x$ exprime le chemin du premier Courrier, pendant le temps $\frac{3}{11}x$ c'est-à-dire avant d'être attrapé.

Par ce moyen on a la même quantité exprimée de deux façons différentes, car le chemin

du fecond Courrier a premierement pour expreffion x, en fecond lieu il eft la fomme des $\frac{45}{2}$ lieues d'avance qu'avoit le premier Courrier fur lui, & des $\frac{15}{22}x$ que ce même premier Courrier devoit avoir fait, jufqu'à ce qu'il fut attrapé. Egalant donc ces deux expreffions, on aura l'Equation $x = \frac{45}{2} + \frac{15}{22}x$ qui donne par les regles précédentes $x = 70 + \frac{5}{7}$.

XXIII.

Si le premier Courrier, outre l'avantage qu'il a d'être parti plûtôt, avoit encore celui d'être parti d'un lieu plus avancé, la queftion, quoique plus compliquée, feroit aifément réduite aux mêmes principes.

Que le premier Courrier par exemple allant en Efpagne, foit parti d'Orleans le lundi à 8 heures du foir en faifant 7 lieues en 3 heures; & que le fecond Courrier allant après le premier foit parti le mardi matin à 10 heures de Paris, fuppofé à 34 lieues d'Orleans, en faifant 13 lieues en 4 heures, on demande le lieu de leur rencontre.

Pour réfoudre cette queftion il faut prendre la différence de 8 heures du foir, à 10 heures du matin, ce qui donne 14 heures; & comme le premier fait 7 lieues en 3 heures, on aura par cette proportion

$$\overset{\text{heures}}{3} : \overset{\text{lieues}}{7} = \overset{\text{heures}}{14} : \overset{\text{lieues}}{\tfrac{98}{3}}$$

lefquelles étant ajoutées avec les 34 lieues d'avance donneront $34 + \frac{98}{3}$ ou $\frac{200}{3}$ lieues pour la diftance de Paris où étoit le premier Courrier, lorfque le fecond eft parti. Enfuite on fera comme ci-deffus cette proportion.

lieues heures . lieues heures

$13 : 4 = x : \frac{4}{13}x$ nombre d'heures nécessaires au second Courrier pour faire le chemin x.

Mais pendant ce même nombre d'heures, le premier Courrier aura fait un chemin qu'on trouvera ainsi

heures lieues heures lieues

$3 : 7 = \frac{4}{13}x : \frac{28}{39}x$

L'on aura donc l'Equation $x = \frac{28}{39}x + \frac{200}{3}$ d'où l'on tire par les regles expliquées ci-dessus $x = 236 + \frac{4}{11}$, chemin du second Courrier, lorsqu'il aura attrappé le premier.

XXIV.

Lorsque les premiers Algebristes ont eu trouvé la solution de quelque question qui les intéressoit, ils n'ont gueres manqué d'en faire différentes applications en variant les nombres donnés dans ces questions. Par exemple ils auront repeté plusieurs fois la question précédente, en changeant les rapports des vitesses des Courriers, & la distance entre leurs départs. Dans ces différentes applications ils ont senti qu'il y avoit une partie de l'operation qu'on repetoit à chaque exemple particulier du même Problême, & qui pouvoit se faire une fois pour toutes en cherchant quelque solution où l'on ne se restraignit point à tel ou tel nombre particulier, mais qui fut générale pour tout nombre donné. Pour faire voir ce qu'ils ont imaginé à ce sujet, nous allons reprendre le Problême précédent, & le traiter le plus généralement qu'il nous sera possible.

Solution du Problême précédent pris généralement.

Soit exprimée la distance qui est entre les deux Courriers par la lettre . . . . a
on fera de cet a le nombre de lieues qu'on voudra, lorsque la question sera poussée jusqu'à la fin.

Soit exprimée ensuite le nombre d'heures dont le départ du premier Courrier a précedé celui du second par la lettre . . . . b

Que la vitesse du premier Courrier soit telle qu'il fasse le nombre de lieues c
pendant le nombre d'heures . . . . d

Que la vitesse du second Courrier soit telle qu'il fasse le nombre de lieues . . . . e
dans le nombre d'heures . . . . f

Soit enfin comme dans la solution particuliere le chemin que le second Courrier doit faire pour joindre le premier x

On employe les premieres lettres de l'Alphabet, pour exprimer ce que l'on connoit, & les dernieres pour ce qu'on ne connoit pas.

C'est une attention qu'on a communément dans l'Algebre, de prendre les premieres lettres a, b, c, &c. de l'Alphabet, pour exprimer les quantités connues & les dernieres s, t, u, x, &c. pour celles qu'on cherche.

Pour trouver présentement à l'exemple de la méthode qu'on a suivie dans l'exemple précédent, le chemin que fait le premier Courrier pendant le nombre d'heures b, il faudra chercher le quatriéme terme d'une proportion, dont le premier terme soit le nombre d'heures d, le second le nombre de lieues c, le troisiéme le nombre d'heures b, & il est clair que cette operation se fera, comme dans toutes les autres regles de trois, en multipliant le second & le troisiéme terme, l'un par l'autre, & en divisant

leur produit par le premiere terme.

Quant à la maniere d'exprimer le produit de ces termes qui ne sont plus comme ci-dessus des chiffres, mais des lettres propres à exprimer des nombres quelconques, ce qu'on a trouvé de plus simple c'est de placer à côté l'une de l'autre, les lettres qu'on veut multiplier, à l'égard de la division, nous avons dejà vû qu'en Algebre comme en Arithmetique, on mettoit une barre horizontale entre les quantités qu'on veut diviser.

Les lettres qui se suivent sans aucun signe entr'elles sont censées se multiplier.

Par ce moyen la proportion précédente s'écrit ainsi $d : c = b : \frac{bc}{d}$

Ayant donc $\frac{bc}{d}$ pour exprimer le chemin que le premier Courrier a fait avant que le second soit parti, si on ajoute à ce chemin la distance a qui étoit entr'eux, on aura pour le chemin d'avance du premier au moment du départ du second . . . . $a + \frac{bc}{d}$

Pour trouver ensuite le chemin que le premier Courrier fait pendant que l'autre court après lui & qu'il parcourt x; commençons ainsi que ci-dessus par trouver le temps que le second Courrier met à parcourir l'espace x, ce qui se fera par le moyen d'une proportion . . . $e : f = x : \frac{fx}{e}$ dont le premier terme sera le nombre de lieues e, le second le nombre d'heures f, le troisiéme le nombre de lieues x & le quatriéme $\frac{fx}{e}$ le tems cherché.

Or quel que soit le nombre d'heures $\frac{fx}{e}$ qu'ait couru le second Courrier pour attrapper le pre-

mier, on sçait que si on fait une proportion dont les trois premiers termes soient 1°. le nombre d'heures d, 2°. le nombre de lieues c; 3°. le nombre précédent $\frac{fx}{e}$, le quatriéme terme sera le chemin que le second a fait dans le même temps que le premier Courrier a fait x.

Cette proportion s'écrira ainsi $d : c = \frac{fx}{e} : \frac{c \times \frac{fx}{e}}{d}$ nombre de lieues faites par le premier Courrier pendant que le second parcourt x.

Mais le chemin du premier Courrier ajouté avec le chemin $a + \frac{bc}{d}$ qu'il avoit d'avance, doit égaler le chemin du second.

On a donc l'Equation $x = a + \frac{bc}{d} + \frac{c \times \frac{fx}{e}}{d}$

Si on se ressouvient des operations des fractions, on doit sçavoir que pour multiplier une fraction comme $\frac{6}{5}$ par 4 il faut multiplier le numerateur * & écrire $\frac{6 \times 4}{5}$ ou $\frac{24}{5}$. De même pour multiplier $\frac{fx}{e}$ par c il faut multiplier c par fx & laisser le diviseur e, ce qui donne $\frac{cfx}{e}$ pour

* On doit avoir vû dans l'Arithmetique, que le numerateur d'une fraction est le nombre placé au dessus de la barre, & qui sert de Dividende; de même qu'on appelle denominateur, le nombre qui est au dessous de la barre & qui sert de diviseur. Les operations d'Arithmetique que je suppose ici, & dans beaucoup d'autres endroits de cet ouvrage, sont expliqueés assez clairement dans plusieurs livres. Pour éviter cependant aux Lecteurs la peine d'y recourir. Je vais en peu de mots rappeller ces operations & les raisons sur lesquelles elles sont fondées.

$c \times \frac{fx}{e}$. On ſçait de plus que quand on diviſe une fraction comme $\frac{5}{3}$ par un nombre quelconque comme 6, il faut multiplier le dénominateur 3 par ce nombre 6, ce qui donne $\frac{5}{3 \times 6}$ ou $\frac{5}{18}$. De même pour diviſer la fraction $\frac{cfx}{e}$ par d il faut écrire $\frac{cfx}{de}$.

Pour multiplier une fraction telle que $\frac{5}{7}$ par 8 on multiplie le numerateur 5 par 8, & l'on écrit le même diviſeur 7 ſous leur produit 40, ce qui donne $\frac{40}{7}$ la raiſon en eſt claire, car 8 fois 5 ſeptiémes doivent faire 40 ſeptiémes, comme 8 fois 5 grandeurs quelconques font 40 de ces mêmes grandeurs.

Pour diviſer $\frac{3}{5}$ par 4, il faut écrire ſous le numerateur 3 le produit 20 de 4 par le denominateur 5, ce qui donne $\frac{3}{20}$. La raiſon en eſt que 1 cinquiéme devenant 1 vingtiéme, lorſqu'on le diviſe par 4, 3 cinquiémes doivent devenir 3 vingtiémes par la même diviſion.

Pour multiplier $\frac{5}{7}$ par $\frac{8}{3}$ on multiplie les numerateurs 5 & 8, & on diviſe leur produit 40 par le produit 41 des denominateurs 3 & 7 ce qui donne $\frac{40}{21}$. Cette operation eſt fondée ſur ce que le produit de $\frac{8}{3}$ par $\frac{5}{7}$ doit être 3 fois plus petit que celui de 8 par $\frac{5}{7}$, mais 8 par $\frac{5}{7}$ a donné $\frac{40}{7}$ donc $\frac{8}{3}$ par $\frac{5}{3}$ doit donner le tiers de $\frac{40}{7}$ c'eſt-à-dire $\frac{40}{21}$.

Enfin pour diviſer $\frac{3}{5}$ par $\frac{4}{11}$ il faut multiplier le numerateur 3 de la premiere fraction par le dénominateur 11 de la ſeconde, & diviſer leur produit 33 par le produit 20 du dénominateur 5 de la premiere fraction & du numerateur 4 de la ſeconde, ce qui donne $\frac{33}{20}$. Operation dont on voit la raiſon en remarquant que $\frac{3}{5}$ diviſés par 4 donneroient $\frac{3}{20}$ & que $\frac{3}{5}$ diviſés par $\frac{4}{11}$ qui ſont 11 fois plus petits que 4 doivent donner un quotient 11 fois plus grand, c'eſt-à-dire $\frac{33}{20}$.

Ayant ainsi changé l'Expression précédente $\frac{c \times \frac{fx}{e}}{d}$ en $\frac{cfx}{de}$ l'Equation qu'on doit résoudre est $x = a + \frac{bc}{d} + \frac{cfx}{de}$. Operation qui demande qu'on commence, ainsi qu'on l'a enseigné Art. XVIII. par multiplier tous les termes, excepté le dernier par le diviseur de afin de l'ôter de ce terme.

Nous aurons par cette operation $dex = ade + \frac{bcde}{d} + cfx$ ou $dex = ade + bce + cfx$ à cause que $\frac{bcde}{d}$ est la même chose que bce puisque la quantité bce reste la même lorsqu'on la multiplie & qu'on la divise par d.

Passant le terme cfx dans le premier membre on aura $dex - cfx = ade + bce$.

Afin de trouver x dans cette Equation, nous remarquerons que si nous connoissions les nombres de, & cf qui expriment ce que contiennent d'x les termes dex, & cfx, nous retrancherions le second du premier, & que le reste qui exprimeroit la quantité d'x contenues dans le premier membre de l'Equation, serviroit de diviseur au second membre pour avoir la valeur de x. Or sans connoître les nombres de, & cf, il est clair que $de - cf$ exprime leur différence, & par conséquent la quantité d'x que contient le premier membre de l'Equation $dex - cfx = ade + bce$. Donc x a pour valeur ce qui vient en divisant le second membre par ce nombre $de - cf$. Donc $x = \frac{ade + bce}{de - cf}$ & c'est là la solution générale du Problême pré-

cédent, car qu'on ſçache à préſent ce que c'eſt que a, b, c, d, e, f, on n'aura plus qu'à en faire l'uſage indiqué par cette valeur génerale de x, c'eſt-à-dire, multiplier ſucceſſivement a, d, e, l'un par l'autre : ajouter à ce produit celui que l'on a en multipliant ſucceſſivement b, c, e, & diviſer la ſomme de ces deux produits, par le nombre qui eſt la différence du produit de c par f au produit de d par e, & l'on aura par cette operation telle ſolution particuliere qu'on voudra.

XXV.

Application de la ſolution précédente à des nombres.

Suppoſons, par exemple, comme dans l'Art. XXIII. que la diſtance entre les deux Courriers ſoit de 34 lieues, que le premier Courrier ſoit parti 14 heures plutôt que le ſecond, qu'il faſſe 7 lieues en 3 heures, & que le ſecond faſſe 13 lieues en 4 heures, on aura

$$a = 34,\ b = 14,\ c = 7$$
$$d = 3,\ e = 13,\ f = 4$$

qui donneront $a\,d\,e = 34 \times 3 \times 13$, c'eſt-à-dire

$$= 102 \times 13 = 1326,$$
$$b\,c\,e = 14 \times 7 \times 13 = 1274$$

& par conſequent $a\,d\,e + b\,c\,e = 2600$

$$d\,e = 39,\ cf = 28 \text{ \& partant } d\,e - cf = 11$$

D'où l'on tirera $x = \frac{ade + bce}{de - cf} = \frac{2600}{11} = 236 + \frac{4}{11}$ ainſi qu'on l'a trouvé dans l'Art. XXIII.

Autre application.

Si on veut enſuite tirer de la ſolution générale le premier cas calculé dans l'art. XXII où les deux Courriers étoient ſuppoſés partir du même lieu, le premier ayant 9 heures d'avance, & une vîteſſe capable de lui faire faire 5 lieues en 2 heures, tandis que le ſecond en fait

11 en 3. On aura dans ce cas . . . .

$$a = 0,\ b = 9,\ c = 5,$$
$$d = 2,\ e = 11,\ f = 3,$$

& ſubſtituant ces valeurs dans la formule générale ou valeur de x on aura $x = \frac{9 \times 5 \times 11}{2 \times 11 - 5 \times 3} = \frac{495}{7} = 70 + \frac{5}{7}$ ainſi qu'on l'a trouvé dans l'art. XXII. On fera de même tant d'autres applications qu'on voudra.

XXVI.

On n'a pas eu plûtôt trouvé la maniére de généraliſer un Problême en ſe ſervant de lettres au lieu de nombres, qu'on a preſque toujours pris les Problêmes dans leur plus grande généralité, il faut donc accoutumer les Commençans à les traiter ainſi. Dans cette vue nous allons réſoudre le Problême ſuivant.

Cinquiéme Probléme.

Un Ouvrier peut faire un certain ouvrage exprimé par a *dans un tems exprimé par* b*; un ſecond fait l'ouvrage* c *dans le tems* d*, un troiſiéme l'ouvrage* e *dans le tems* f*, on demande quel tems il faudra à ces trois Ouvriers travaillant enſemble pour faire l'ouvrage* g

Soit x le tems cherché on aura l'ouvrage fait par le premier dans ce tems, en faiſant la proportion ſuivante :

$$b : a = x : \frac{ax}{b}$$

On aura l'ouvrage fait dans le même tems par le ſecond Ouvrier en faiſant la proportion.

$$d : c = x : \frac{cx}{d}$$

Enfin on aura l'ouvrage fait dans le même tems

par le troisiéme Ouvrier par le moyen de cette proportion $f : e = x : \frac{ex}{f}$.

Donc $\frac{ex}{f} + \frac{cx}{d} + \frac{ax}{b}$ eſt l'ouvrage des trois Ouvriers travaillant enſemble pendant le tems cherché, mais cet ouvrage doit égaler g, on a donc l'Equation $\frac{ex}{f} + \frac{cx}{d} + \frac{ax}{b} = g$.

Pour la réſoudre on multipliera ſuivant les principes de l'article XVIII. toute l'Equation par le produit fdb des diviſeurs, & l'on aura $\frac{edfbx}{f} + \frac{cdbfx}{d} + \frac{axfdb}{b} = bdfg$ qui ſe réduit à $edbx + fcbx + adfx = fbdg$, dans laquelle remarquant que $edb + fcb + adf$ doit exprimer le nombre d'x contenus dans le ſecond membre, on aura $x = \frac{bdfg}{bde + bcf + adf}$.

XXVII.

Pour faire quelqu'application de ce Problême, ſuppoſons qu'un Maſſon ait pû faire 7 pieds courans d'une muraille en 5 jours, qu'un ſecond Maſſon en ait pû faire 10 pieds en 3 jours, & un troiſiéme 11 en 4 jours, on demande le tems dans lequel ces trois Maſſons travaillant enſemble feront 150 pieds courans de la même muraille. Exemple en nombres.

On aura par ces ſuppoſitions

$a = 7$; $b = 5$; $c = 10$; $d = 3$; $e = 11$, $f = 4$, $g = 150$,

& partant $bdfg = 5 \times 3 \times 4 \times 150 = 9000$

$bde = 5 \times 3 \times 11 = 165$; $bcf = 5 \times 10 \times 4 = 200$

$adf = 7 \times 3 \times 4 = 84$, ce qui donnera pour la

valeur de x, $\frac{9000}{447}$ ou $20 + \frac{20}{449}$ nombre de jours dans lequel l'ouvrage proposé sera fait.

XXVIII.

Autre exemple.

Supposons maintenant qu'on demande en quel tems un reservoir de 200 pieds cubes sera rempli par trois tuyaux dont le premier pourroit remplir 9 pieds cubes en $2\frac{1}{2}$ jours, le second 15 pieds cubes en $3\frac{1}{3}$ jours, & le troisiéme 19 pieds cubes en $5\frac{1}{4}$ jours; . . . . $a = 9$; $b = 2\frac{1}{2}$ ou $\frac{5}{2}$; $c = 15$; $d = 3\frac{1}{3}$ ou $\frac{10}{3}$; $e = 19$; $f = 5\frac{1}{4}$ ou $\frac{21}{4}$; $g = 200$.

Par les substitutions on aura . . . .

$$x = \frac{\frac{5}{2} \times \frac{10}{3} \times \frac{21}{4} \times 200}{\frac{5}{2} \times \frac{20}{3} \times 19 + \frac{5}{2} \times 15 \times \frac{21}{4} + 9 \times \frac{10}{3} \times \frac{21}{4}}$$

qui devient $$\frac{\frac{210000}{2 \times 3 \times 4}}{\frac{950}{2 \times 3} + \frac{1575}{2 \times 4} + \frac{1890}{3 \times 4}}$$

Pour réduire cette quantité je multiplie le numerateur & le dénominateur de la premiere fraction du diviseur par 4; le numerateur & le dénominateur de la seconde par 3; & le numerateur de la troisiéme par 2, ce qui change la

quantité en $$\frac{\frac{210000}{2 \times 3 \times 4}}{\frac{3800}{2 \times 3 \times 4} + \frac{4725}{2 \times 3 \times 4} + \frac{3780}{2 \times 3 \times 4}}$$

ou $\frac{\frac{210000}{2 \times 3 \times 4}}{\frac{12305}{2 \times 3 \times 4}}$ ou $\frac{210000}{12305}$ ou $17 + \frac{363}{2461}$

nombre cherché des jours qu'il faudroit pour remplir le reservoir donné en laissant couler les trois tuyaux à la fois.

XXIX.

XXIX.

On voit par les deux Problêmes précédens que les regles qu'on a données (art. x & fuiv.) pour réfoudre les Equations numériques du premier dégré peuvent également s'appliquer aux Equations litterales, mais on voit en même-tems que ces régles font trop fuccintes pour que les Commençans n'ayent pas befoin qu'on les conduife encore dans la maniere de les employer, nous nous croyons d'autant plus obligés à les aider par un grand nombre de ces applications, que c'eft probablement à un pareil travail qu'on doit plufieurs opérations d'Algebre très-utiles, que nous allons pour ainfi dire découvrir chemin faifant.

Les regles des art. x & fuiv. fuffifent pour les Equations literales.

L'application de ces regles a donné naiffance à plufieurs operations de l'Algebre.

Soit propofé de réfoudre l'Equation $2ac + ab - ax = 3ac + 2ax - 5ab - dx$

Je commence par paffer les termes $3ac$ & $-5ab$ dans l'autre membre de l'Equation en les changeant de figne ce qui me donne $2ac + ab - ax - 3ac + 5ab = 2ax - dx$. Je paffe de même le terme $-ax$ de l'autre côté en obfervant auffi de changer fon figne, ce qui me donne $2ac + ab - 3ac + 5ab = 2ax - dx + ax$. Je réduis enfuite cette Equation, 1° En ajoutant ab avec $5ab$ ce qui me donne $6ab$, 2° En mettant $-ac$ au lieu des termes $2ac$ & $-3ac$; 3° en mettant $3ax$ au lieu de $2ax + ax$; ainfi l'Equation propofée devient $6ab - ac = 3ax - dx$ qui donne $x = \frac{6ab - ac}{3a - d}$

Premier exemple de réfolution d'Equations litterales.

XXX.

Deuxiéme exemple de résolution d'Equations litterales.

Soit $5ab + 2ax - 3bd = 2ab - 5ax + 7bd - ac - dx$; les termes $5ab - 3bd$ deviendront $- 5ab + 3bd$ en passant dans le second membre & les termes $- 5ax - dx$ deviendront $+ 5ax + dx$ en passant dans le premier; on aura donc $2ax + 5ax + dx = 2ab + 7bd - ac - 5ab + 3bd$ qui se réduit à $7ax + dx = 10bd - 3ab - ac$ en mettant $7ax$ à la place de $2ax + 5ax$, $10bd$ à la place de $7bd + 3bd$, & $- 3ab$ à la place de $2ab - 5ab$.

Dégageant présentement x de cette Equation on aura $x = \frac{10bd - ac - 3ab}{7a + d}$

XXXI.

Réduction des quantités à leur plus simple expression.

Dans la résolution des deux Equations précédentes on a eu besoin de réduire à une plus simple expression différens termes de même espece tels que $2ac$ & $- 3ac$; $5ab$ & ab &c. comme cette opération est presque toujours nécessaire dans les Equations à résoudre & dans les tres parties de l'Algebre, les Commençans doivent chercher à la pratiquer facilement. Pour leur en donner le moyen, voici quelques exemples.

Soit $15abc - 13bcd - 7abc + 29bcd - 5abf + 9abc + 6chi$ à réduire.

On prendra dabord les termes $15abc$, $- 7abc$ & $9abc$ qui sont de même espece, & on ajoutera les deux termes $15abc$ & $9abc$ qui sont l'un & l'autre positifs, c'est-à-

dire, affectés du signe $+$; on retranchera ensuite de leur somme laquelle est $24abc$, le terme $7abc$ à cause qu'il est négatif ou précédé du signe $-$, moyennant quoi $17abc$ sera ce que deviennent les trois termes $15abc - 7abc + 9abc$. De la même maniere au lieu de $29bcd - 13bcd$ on mettra $16bcd$. Quant aux termes $-5abf$ & $6chi$ qui sont seuls de leurs especes, on les écrira tels qu'ils sont, ainsi la quantité réduite sera $17abc + 16bcd - 5abf + 6chi$.

On appelle termes positifs ceux qui sont précédés de $+$ négatifs ceux qui sont précédés de $-$

Soit $\frac{5}{3}ab - \frac{4}{5}ac + \frac{3}{4}ax - ad + 7ab + \frac{5}{7}ax$, on aura en réduisant $\frac{26}{3}ab + \frac{41}{28}ax - \frac{4}{5}ac - ad$.

La quantité $2acd - 5ach - 3acd + 3ach - 6bfi$ deviendra en réduisant $-acd - 2ach - 6bfi$ qui étant entierement négative, montre que la quantité qu'on vouloit réduire renfermoit plus de négatif que de positif.

XXXII.

Il est à propos d'avertir ici que la réduction qu'on vient d'apprendre dans les exemples précédens, est absolument la même regle que celle qu'on appelle l'Addition, car lorsqu'on se propose d'ajouter deux quantités quelconques, il suffit de les écrire de suite & de les réduire après à leur plus simple expression: qu'on ait besoin, par exemple, d'ajouter la quantité $6ab - 2ac - 3ad$ avec $3ab + ac - 2ad + bf$, il n'y a autre chose à faire que de réduire la quantité $6ab - 2ac - 3ad + 3ab + ac - 2ad + bf$, ce qui donnera donc $9ab -$

L'Addition algebrique est la même operation que la précédente.

$ac - 5ad + bf$ pour la ſomme des deux propoſées.

Si on veut ajouter les deux quantités $2ac - 3ad + af$ & $ad - 5ac - 2af$, il ne s'agira que de réduire la quantité $2ac - 3ad + af + ad - 5ac - 2af$. La réduction faite il viendra $-3ac - 2ad - af$. On s'étonnera peut-être d'abord qu'une Addition puiſſe mener à une quantité négative, mais l'on trouvera bien-tôt le dénouement de cette difficulté en remarquant qu'il faut néceſſairement, ou que les deux quantités $2ac - 3ad + af$ & $ad - 5ac - 2af$ ſoient toutes deux négatives, ou qu'au moins l'une des deux ſoit négative & plus grande que l'autre.

C'eſt ce qu'on reconnoîtra plus facilement en faiſant quelques exemples en nombres. Suppoſons d'abord que $a = 2$, $c = 3$, $d = 4$; $f = 5$, dans ce cas au lieu de $2ac - 3ad + af$ nous aurons $12 - 24 + 10$ ou ſimplement -2, & au lieu de $ad - 5ac - 2af$ il viendra $8 - 30 - 20 = -42$. Ainſi leur ſomme ſera -44, & on ne ſera pas étonné que la ſomme de deux quantités négatives ſoit négative.

Suppoſons enſuite que $a = 6$; $c = 5$; $d = 3$; $f = 2$ on aura $2ac - 3ad + af = 18$ & $ad - 5ac - 2af = -156$. Or comme la ſeconde quantité eſt négative, & plus grande que la premiere la ſomme doit être négative.

XXXIII.

On demandera peut-être si on peut ajouter du négatif avec du positif, ou plûtôt si on peut dire qu'on ajoute du négatif. A quoi je réponds que cette expression est exacte quand on ne confond point ajouter avec augmenter. Que deux personnes, par exemple, joignent leurs fortunes, quelles qu'elles soient, je dirai que c'est là ajouter leurs biens, que l'un ait des dettes & des effets réels, si ses dettes surpassent ses effets, il ne possedera que du négatif, & la jonction de sa fortune à celle du premier diminuera le bien de celui-ci, ensorte que la somme se trouvera, ou moindre que ce que possedoit le premier, ou même entierement négative.

Comment on peut dire que l'on ajoute une quantité négative.

XXXIV.

La réduction enseignée dans les Articles précédens donne encore naissance à une autre regle d'Algebre, la Soustraction; car, par exemple, lorsque dans l'Equation $2ac + ab - ax = 3ac + 2ax - 5ab - dx$ (art. XXIX.) on a passé les termes $3ac - 5ab$ de l'autre côté en les changeant de signe, & qu'on est arrivé à l'Equation $2ac + ab - ax - 3ac + 5ab = 2ax - dx$ ou $-ac + 6ab - ax = 2ax - dx$, je dis qu'on a retranché la quantité $3ac - 5ab$ de la quantité $2ac + ab - ax$ & que le reste est $-ac + 6ab - ax$. Car en faisant disparoître $ac - 5ab$ du second membre de l'Equation, c'est une Soustraction qu'on a faite de cette quantité, or pour que l'égalité soit conservée, il faut qu'on ait fait

On tire encore de l'opération précédente la Soustraction algebrique.

une pareille Soustraction de l'autre côté, donc $2ac + ab - ax - 3ac + 5ab$ ou $-ac + 6ab - ax$ est ce qui reste de la quantité $2ac + ab - ax$ lorsqu'on en a ôté $3ac - 5ab$.

Procédé de la Soustraction.

Ainsi lorsqu'on a deux quantités dont l'une doit être soustraite, il faut changer les signes de celle qu'on veut soustraire, l'écrire à la suite de l'autre, puis faire la réduction des quantités de même espece, ce qui, indépendamment de ce qu'on vient de dire, pourroit se démontrer de la maniere suivante.

Soit la quantité $2ac + ab - ax$ dont on se propose de retrancher la quantité $3ac - 5ab$. Il est évident que si on vouloit retrancher de la premiere quantité simplement $3ac$ il faudroit écrire $2ac + ab - ax - 3ac$, mais en retranchant la quantité $3ac$ au lieu de $3ac - 5ab$ on retranche une quantité trop grande de $5ab$: Donc il faut ajouter les $5ab$ qu'on a ôté de trop en ôtant $3ac$. Donc il faut écrire $2ac + ab - ax - 3ac + 5ab$ pour le reste de $2ac + ab - ax$ lorsqu'on en a ôté $3ac - 5ab$.

Afin de s'exercer dans cette regle qu'on sent bien devoir être employée souvent j'ajouterai les exemples suivans.

De $5ab + 10fg - 3ac + 2de$ si on retranche $2ab - 5fg + 6ac + de$, il restera $5ab + 10fg - 3ac + 2de - 2ab + 5fg - 6ac - de$ ou $3ab + 15fg - 9ac + de$.

De la quantité $6aeb + 3agh - 10bcd$ si on retranche $abc - 10aeb - 8agh$ on aura $16aeb - abc - 10bcd + 11agh$

De la quantité $3ac + ab + be$ si on retranche la quantité $- ac - 3ab$ il viendra $4ac + 4ab + be$.

XXXV.

Si on s'étonne que dans cette Soustraction le reste $4ac + 4ab + be$ soit plus grand que la quantité $3ac + ba + be$ dont on se proposoit de soustraire $- ac - 3ab$, ce ne pourra être qu'en confondant soustraire & diminuer ; car si on reconnoît au contraire que soustraire une quantité quelconque, a par exemple, d'une autre b, c'est sçavoir de combien b surpasse a, on trouvera très-possible qu'une quantité augmente par une soustraction. Qu'on demande, par exemple, de combien un homme est plus riche qu'un autre, si ce dernier n'a que des dettes, on verra bien-tôt que l'excès de richesse du premier sera ce qu'il possede plus une somme égale aux dettes de l'autre. On augmente une quantité lorsqu'on en soustrait une quantité négative.

XXXVI.

Soit proposé de résoudre présentement l'Equation $\frac{cx}{2a} - \frac{ac}{2b} = x - \frac{4ad}{3c}$ pour faire disparoître d'abord le diviseur $2a$, on le fera servir suivant l'art. XV. de multiplicateur à tous les termes de l'Equation, & l'on aura $cx - \frac{ac \times 2a}{2b} = 2a \times x - \frac{4ad \times 2a}{3c}$, mais au lieu de $ac \times 2a$ il est clair qu'on peut mettre $2aac$, puisque le produit de $2a$ par ac doit être double de celui de a par ac & que le produit de a par ac doit être aac. De même $2a \times x$ sera Troisiéme exemple de résolution d'Equations litterales.

$2ax$ & $4ad \times 2a$ sera $8aad$, car le produit de ad par a est aad & celui de $4ad$ par $2a$ doit être octuple de celui de ad par a.

L'Equation est donc changée en $cx - \frac{2aac}{2b} = 2ax - \frac{8aad}{3c}$ ou $cx - \frac{aac}{b} = 2ax - \frac{8aad}{3c}$ à cause que $\frac{2aac}{2b}$ ou $\frac{aac}{b}$ sont la même chose; multipliant alors tous les termes de cette Equation par $2b$ elle deviendra $b \times cx - aac = 2ax \times b - \frac{8aad}{3c} \times b$ ou $bcx - aac = 2abx - \frac{8aabd}{3c}$ qui se changera encore en $cbx \times 3c - aac \times 3c = 2abx \times 3c - 8aabd$ ou $3bccx - 3aacc = 6abcx - 8aabd$, car les produits de c par cbx, aac & $2abx$, seroient $bccx$, $aacc$, $2abcx$, & par consequent ceux de $3c$ par les mêmes quantités, doivent être triples, c'est-à-dire, $3bccx$, $3aacc$, $6abcx$, transposant présentement on aura $3bccx - 6abcx = 3aacc - 8aabd$ qui donne enfin $x = \frac{3aacc - 8aabd}{3bcc - 6abc}$.

XXXVII.

Dans l'exemple précedent, la multiplication de quelques quantités qui contenoient les mêmes lettres a donné la répetition de ces lettres dans les produits : Or comme les Algebristes cherchent toujours à s'exprimer de la maniere la plus courte, ils ont imaginé au lieu de répeter une lettre plusieurs fois de suite, de ne l'écrire qu'une seule fois, en plaçant au dessus de cette lettre & à sa droite un chiffre, qui désigne le nombre de fois que cette lettre devroit être

Un chiffre placé au dessus & à droite d'une lettre, désigne ce qu'elle auroit été re-

répetée. Par-là au lieu de l'expreſſion précé-dente $x = \frac{3aacc - 8aabd}{3bcc - 6abc}$

pétée de fois par la multiplication.

on écrira $x = \frac{3a^2c^2 - 8a^2bd}{3bc^2 - 6abc}$.

Lorſque dans une opération on aura beſoin de aaa, c'eſt-à-dire du produit de aa par a ou de a multiplié par lui-même deux fois de ſuite, on mettra ſimplement a^3. De même au lieu de $cccc$, c^4. Lorſqu'une lettre eſt ainſi répetée ou plutôt cenſée répetée à l'aide d'un chiffre, on dit qu'elle eſt élevée à la puiſſance exprimée par ce chiffre, & que ce chiffre eſt ſon expoſant. Ainſi c^4 ou $cccc$ qui eſt le produit de c trois fois par lui-même eſt dit c élevé à la quatriéme puiſſance, & 4 eſt ſon expoſant. Il faut bien prendre garde de confondre les chiffres qui ſervent d'expoſant avec ceux qui ſont à la gauche des lettres & ſur la même ligne, ceux-ci ſont nommés coefficiens; dans $4a^2c$, par exemple, 4 eſt le coefficient du terme, 2 eſt l'expoſant de a.

Et dans ce cas la lettre eſt dite élevée à la puiſſance exprimée par ce chiffre qu'on appelle expoſant.

Les chiffres qui ſont à gauche & ſur la même ligne ſont nommés coefficiens.

LXXVIII.

Soit l'Equation $\frac{2ab^2x}{3c^2d} + \frac{5ac^2}{b^2} = \frac{6cd^2}{a^2} - 3x$, en multipliant tous ſes termes par le diviſeur $3c^2d$, on aura $2ab^2x + \frac{5ac^2 \times 3c^2d}{b^2} = \frac{6cd^2 \times 3c^2d}{a^2} - 3x \times 3c^2d$.

Quatriéme exemple de réſolution d'Equations littérales.

Pour faire enſuite les multiplications indiquées par les ſignes ×, nous remarquerons d'abord que ac^2 multiplié par c^2d doit donner

pour produit ac^4d, car si au lieu de ac^2 & de c^2d on écrivoit acc & ccd, ainsi qu'on le pourroit, on verroit tout de suite que le produit de acc par ccd seroit $accccd$, c'est-à-dire suivant l'article précédent ac^4d. Ayant donc ac^4d pour le produit de ac^2 par c^2d, il est clair que $15ac^4d$ sera celui de $5ac^2$ par $3c^2d$

De la même maniere on trouvera $18c^3d^3$ pour le produit de $6cd^2$ par $3c^2d$ & $9c^2dx$ pour celui de $3x$ par $3c^2d$. Donc l'Equation précédente se changera en $2ab^2x + \frac{15ac^4d}{b^2}$ $= \frac{18c^3d^3}{a^2} - 9c^2dx$.

Multipliant ensuite cette nouvelle Equation par b^2 elle devient $2ab^4x + 15ac^4d = \frac{18b^2c^3d^3}{a^2} - 9b^2c^2dx$ & multipliant de même celle-ci par a^2, on a $2a^3b^4x + 15a^3c^4d = 18b^2c^3d^3 - 9b^2a^2c^2dx$ qui donne en transposant $2a^3b^4x + 9b^2a^2c^2dx = 18b^2c^3d^3 - 15a^3c^4d$ d'où l'on tire enfin $x = \frac{18b^2c^3d^3 - 15a^3c^4d}{2a^3b^4 + 9a^2b^2c^2d}$.

XXXIX.

Les quantités incomplexes sont celles qui n'ont qu'un terme.

Multiplication des quantités incomplexes,

Dans les deux exemples précédens on a eu besoin de sçavoir multiplier des quantités exprimées par un simple terme telles que $4ad$, $9c^2d$ &c. qu'on appelle communément quantités incomplexes ou monomes, & l'on a trouvé en même-tems ce qu'il falloit pour faire cette opération. La méthode générale qui résulte des raisonnemens qu'on a employés dans

ces exemples particuliers, c'eſt de commencer par multiplier les coefficiens; d'ajouter enſuite les expoſants des mêmes lettres & d'écrire de ſuite celles qui ſont différentes. Ainſi ſuivant cette régle $3a^5b^3d \times 7a^2bd^2 = 21a^7b^4d^3$; $\frac{2}{3}a^2cd \times \frac{2}{5}ac^3bd = \frac{18}{15}a^3c^4bd^2 = \frac{6}{5}a^3c^4bd^2$; $\frac{2}{3}ac^2de \times 9a^4fg = 6a^5c^2defg$. tirée des deux Exemples précédens.

XL.

Soit l'Equation $\frac{a^2c}{2b^2} + \frac{4cx}{3a} = \frac{5ab}{c} - 3a$, en multipliant tous les termes par $2b^2$ j'aurai $a^2c + \frac{8b^2cx}{3a} = \frac{10ab^3}{c} - 6ab^2$ multipliant encore tous les termes par $3a$ j'aurai $3a^3c + 8b^2cx = \frac{30a^2b^3}{c} - 18a^2b^2$ & faiſant encore la même opération pour chaſſer le diviſeur c il vient $3a^3c^2 + 8b^2c^2x = 30a^2b^3 - 18a^2b^2c$ d'où l'on tire . . . . $x = \frac{30a^2b^3 - 18a^2b^2c - 3a^3c^2}{8b^2c^2}$ qu'on peut encore écrire ainſi $x = \frac{30a^2b^3}{8b^2c^2} - \frac{18a^2b^2c}{8b^2c^2} - \frac{3a^3c^2}{8b^2c^2}$ puiſque $8b^2c^2$ diviſant toute la quantité $30a^2b^3 - 18a^2b^2c - 3a^3c^2$ diviſe chacune de ſes parties. Cinquième exemple de résolution d'Equations litterales.

Or la valeur d'x, ainſi écrite, peut avoir une plus ſimple expreſſion en réduiſant chaque terme. Car 1°. au lieu de $\frac{30a^2b^3}{8b^2c^2}$ on peut mettre $\frac{15a^2b}{4c^2}$ parce qu'on peut regarder le numerateur, comme le produit de $2b^2$ par $15a^2b$

& le dénominateur comme celui de la même quantité $2b^2$ par $4c^2$, divisant donc l'un & l'autre par la même quantité $2b^2$ il vient $\frac{15a^2b}{4c^2}$; 2°. au lieu de $\frac{18a^2b^2c}{8b^2c^2}$ on peut mettre $\frac{9a^2}{4c}$ car le numerateur est le produit de $2b^2c$ par $9a^2$ & le dénominateur est le produit de la même quantité $2b^2c$ par $4c$. Au lieu de $\frac{3a^3c^2}{8b^2c^2}$ on peut mettre $\frac{3a^3}{8b^2}$. Donc la valeur d'x réduite est $\frac{15a^2b}{4c^2} - \frac{9a^2}{4c} - \frac{3a^3}{8b^2}$

XLI.

Division des quantités incomplexes tirée de cet exemple.

La méthode qu'il faudra suivre généralement dans toutes les opérations de même nature que les précédentes, c'est-à-dire dans les divisions des quantités incomplexes, est aisée à tirer de ce qu'on vient de dire, sur tout après avoir vû la multiplication des quantités incomplexes. On peut énoncer ainsi cette méthode.

Diviser d'abord les coefficiens si la division est possible, ôter les lettres qui ont les mêmes exposants aux numerateurs & aux dénominateurs, diviser ensuite les lettres qui auront des exposants différens dans le dénominateur & dans le numerateur en retranchant les plus petits exposants des plus grands, & en laissant les exposants résidus du côté où étoient les exposants les plus grands. Quant aux lettres différentes il n'y a autre chose à faire qu'à les copier.

Comme cette operation eſt très-ſouvent néceſſaire, il eſt bon de joindre ici quelques exemples pour en faciliter l'uſage aux commençans.

$$\frac{9a^5d^2b^2}{3a^4c^2d^2} = \frac{3ab^2}{c^2}; \quad \frac{18a^4bcd}{14ab^2} = \frac{9a^3cd}{7b}$$

$$\frac{27a^3b^2c^5}{3a^2bc^2} = 9abc^3, \quad \frac{5a^2b^4c^2}{15ab^3} = \frac{abc^2}{3}.$$

XLII.

Sixiéme exemple de réſolution d'Equations litterales.

Soit l'Equation $\frac{a^2x}{b-c} + dc = bx - ac$. Pour faire évanouir le diviſeur $b-c$ il faudra ainſi que ci-deſſus multiplier tous les termes par ce diviſeur, ce qui donnera $aax + \overline{b-c} \times dc = \overline{bx-ac} \times \overline{b-c}$, où j'ai obſervé 1° de mettre une barre au deſſus de $b-c$ dans le premier membre, parce que ſans cela on pourroit croire qu'il n'y auroit que c qui dut multiplier dc. 2° de mettre des barres au deſſus de $bx-ac$ & de $b-c$ dans le ſecond membre, afin qu'on voye que ce ſont ces deux quantités entieres qui doivent ſe multiplier.

C'eſt une attention qu'il faut avoir toutes les fois qu'on veut déſigner des produits ou des puiſſances de quantités complexes; au lieu d'une barre, on ſe ſert quelquefois de parentheſes. Ainſi $a^4\,(a+b)$; ou $a^4 \times \overline{a+b}$ ſignifient également le produit de a^4 par $a+b$; $(a+b) \times (b+d)$ ou $\overline{a+b} \times \overline{b+d}$ le produit de $a+b$ par $a+d$; $(ff+gg)^3$ ou $\overline{ff+gg}^{\,3}$ la quantité $ff+gg$ élevée à la puiſſance dont

Uſage des barres au deſſus des quantités, le même que celui des parentheſes.

l'exposant est 3, c'est-à-dire Art. XXXVII.) multipliée deux fois par elle même.

Il s'agit maintenant de faire les multiplications indiquées par les signes $\times$. Soit proposé d'abord de multiplier dc par $b - c$, il est clair qu'il faudra multiplier dc par b & en retrancher le produit de dc par c, car $b - c$ étant plus petit que b de c, son produit par dc doit être plus petit que celui de b par c, de la quantité $c \times dc$. Donc le produit de $b - c$ par dc est $bdc - ccd$.

Venons présentement au produit de $bx - ac$ par $b - c$, pour le trouver je commence par remarquer qu'en prenant les deux termes $bx - ac$ pour une seule quantité, son produit par $b - c$ doit être, par ce qu'on vient de voir, la quantité dont le produit de $bx - ac$ par b surpasse le produit de $bx - ac$ par c. La question est donc réduite à deux multiplications de la nature de celles qu'on vient de faire & à une soustraction.

La premiere de ces deux multiplications, celle de $bx - ac$ par b, donnera $bbx - abc$; la seconde celle de $bx - ac$ par c, donnera $bcx - acc$; reste donc à retrancher cette derniere quantité de la premiere, ce qui donnera suivant l'Art. XXXIV. $bbx - abc - bcx + ac^2$ & c'est là le produit de $bx - ac$ par $b - c$.

De sorte que l'Equation $\frac{a^2 x}{b - c} + cd = bx - ac$ ou $a^2 x + \overline{b - c} \times cd = \overline{bx - ax} \times \overline{b - c}$ est devenue $a^2 x + bcd - c^2 d = b^2 x - abc - bcx + ac^2$ qui par les transpositions ordinaires donnera $bcd - c^2 d + abc -$

$ac^2 = b^2x - bcx - a^2x$ ou enfin ......

.... $x = \frac{bcd - ccd + abc - ac^2}{b^2 - bc - a^2}$

XLIII.

Dans cet exemple nous avons eu besoin de former une regle d'Algebre, dont nous ne nous étions pas encore servis & qui pouvant être souvent utile, merite que nous nous y arrêtions. On appelle cette regle multiplication des Polynomes. Polynome ou quantité complexe signifie en général une quantité composée de plusieurs termes. Si on veut spécifier le nombre de termes d'une quantité, on l'appelle binome lorsqu'elle en a deux, trinome lorsqu'elle en a trois, &c.

Multiplication des quantités complexes ou Polynomes tirée de l'Art. précédent.

Afin de s'exercer à la multiplication de ces sortes de quantités, il sera bon de prendre quelques exemples, soient premierement $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$ & $3ab^2 - 4bcd$ dont il s'agisse de trouver le produit.

Exemple de multiplication de Polynomes.

En raisonnant comme dans l'article précédent, on verra que puisque la quantité $3ab^2 - 4bcd$ est plus petite que $3ab^2$ de $4bcd$, son produit par $2a^3c^2 - 5a^4b$ doit être plus petit que celui de $3ab^2$ par $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$ du produit de $4bcd$ par $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$.

En conséquence j'écris d'abord ainsi le produit demandé $\overline{2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5} \times 3ab^2 - \overline{2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5} \times 4bcd$.

Faisant présentement les deux multiplications indiquées par les signes $\times$ de la même maniere que celles des quantités incomplexes, on aura $6a^4b^2c^2 - 15a^5b^3 + 18a^6b^2$ pour la valeur du premier produit $\overline{2a^3c - 5a^4b + 6a^5} \times$

$3ab^2$. On aura de même $8a^3bc^3d = 20a^4b^2cd + 24a^5bcd$ pour la valeur du second produit $\overline{2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5} \times 4bcd$. Retranchant alors le second du premier ainsi qu'il est indiqué dans l'expression précédente, on aura $6a^4b^2c^2 - 15a^5b^3 + 18a^6b^2 - 8a^3bc^3d + 20a^4b^2cd - 24a^5bcd$ pour le produit des deux quantités proposées.

XLIV.

Si le multiplicateur de la quantité précédente outre les deux termes $3ab^2 - 4bcd$ avoit encore contenu un autre terme, $-5abc$ par exemple, il est évident que pour avoir le produit total, il auroit fallu retrancher de la quantité précédente le produit de $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$ par $5abc$. Car on auroit dit de même que le multiplicateur $3ab^2 - 4bcd - 5abc$ étant plus petit de $5abc$ que le multiplicateur $3ab^2 - 4bcd$, son produit par $2a^3c^2 + 5a^4b + 6a^5$ doit être plus petit de $5abc \times \overline{2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5}$ que le produit de $3ab^2 - 4bcd$ par $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$. Par la même raison s'il y avoit eu un autre terme, $3acc$ par exemple, au multiplicateur avec le signe $+$, il auroit fallu ajouter le produit $3acc \times \overline{2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5}$ aux produits précédens.

Principe fondamental des Multiplications.

En général on voit qu'un multiplicande quelconque, c'est-à-dire une quantité quelconque à multiplier, étant donné avec la quantité qui doit lui servir de multiplicateur, il faudra former tous les produits du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur & ajouter ou retrancher

retrancher ces produits ſuivant que les termes qui les auront donnés auront le ſigne + ou le ſigne —

Pour exécuter cette operation avec autant d'ordre qu'il eſt néceſſaire, voici le procédé qu'on ſuit.

X L V.

On commence par écrire le multiplicateur ſous le multiplicande, & l'on tire une barre ſous le multiplicateur. Pour former enſuite la premiere ligne du produit que l'on doit écrire ſous cette barre, on multiplie le premier terme du multiplicateur par chacun des termes du multiplicande, en obſervant de laiſſer à chacun de ces produits, le ſigne du terme du multiplicande, ſi le premier terme du multiplicateur n'a aucun ſigne, & eſt par conſequent cenſé avoir le ſigne +. Méthode qu'il faut ſuivre dans la Multiplication.

Pour former enſuite la ſeconde ligne qui doit être écrite ſous la premiere, on multiplie le ſecond terme du multiplicateur par tous les termes du multiplicande, & ſi ce ſecond terme du multiplicateur a encore le ſigne +, c'eſt abſolument la même operation que pour la premiere ligne, mais s'il a le ſigne —, à chacun des produits dont cette ligne eſt compoſée, on met un ſigne contraire à celui du terme du multiplicande auquel il a rapport. Toutes les autres lignes du produit étant formées de la même maniere, par le moyen des autres termes du multiplicateur multipliés par tous ceux du multiplicande, on tire une barre & l'on fait l'addition ou réduction de tous ces produits particuliers; la quantité qui vient alors eſt le produit total demandé.

Nous venons de ſuppoſer que le premier terme du multiplicateur avoit le ſigne +, ſi cependant il avoit le ſigne —, on voit bien qu'à l'égard de ce terme comme à l'égard des autres qui auroient auſſi le ſigne —, il faudroit obſerver de prendre les ſignes contraires à ceux des termes du multiplicande en écrivant le produit de ces termes.

XLVI.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Afin d'éclaircir cette méthode appliquons-là à un exemple, ſoit propoſé de multiplier les deux quantités $2ab - 4ac + ad$ & $3ab - 5ac + 2ad$. La premiere étant priſe pour le multiplicande, & la ſeconde pour le multiplicateur, on écrit cette derniere ſous l'autre & on tire enſuite une barre ſous ces deux quantités; voyez la premiere caſe de la table ci-jointe.

Cela fait, on remarque que le premier terme du multiplicateur eſt cenſé poſitif, & que par conſequent tous les ſignes des termes de la premiere bande du produit doivent être les mêmes que ceux du multiplicande. On écrit donc ſuivant cette remarque à la premiere ligne ſous la barre le premier terme $6a^2b^2$ que donne le produit de $3ab$ par $2ab$ ſans l'affecter d'aucun ſigne, ce qui eſt la même choſe que ſi on lui donnoit le ſigne +.

On met enſuite — pour le ſigne du ſecond terme de la même bande, parce que c'eſt le ſigne du ſecond terme du multiplicande, & on fait ſuivre ce — de $12a^2bc$ produit de $4ac$ & de $3ab$. On conſerve de même le ſigne + du troiſiéme terme du multiplicande pour le

troisiéme terme de la premiere bande du produit, & l'on écrit pour ce terme $3 a^2 b d$ produit de $a d$ & de $3 ab$. La premiere bande du produit étant ainsi achevée, on remarque que le second terme du multiplicateur a le signe —, & que par consequent il faut changer tous les signes du multiplicande pour former les termes de la seconde bande du produit. Ainsi le premier terme de cette seconde bande doit avoir — qu'on écrit donc devant le produit $10 a^2 bc$ des deux termes $2 a b$, $5 ac$.

Le second terme de la même bande devant avoir + puisque le second terme du multiplicande a le signe —, on écrit donc ce signe + devant le produit $20 a^2 c^2$ des deux termes $4ac$, $5ac$.

Le troisiéme terme $a d$ du multiplicande étant précédé du signe +, le troisiéme terme de la seconde bande sera donc affecté du signe — qu'on écrit devant le produit $5a^2 c d$ des deux termes $a d$, $5ac$.

Quant à la troisiéme bande du produit cherché, comme le troisiéme terme du multiplicateur a le signe +, il faudra garder tous les signes du multiplicande, & par consequent le premier terme, c'est-à-dire le produit de $2 a b$ & de $2ad$, sera $4 a^2 b d$ précédé du signe +, le second, c'est-à-dire le produit de $4 a c$ & de $2ad$ sera $8 a^2 c d$ précédé du signe —, & le troisiéme, c'est-à-dire le produit de $2ad$ par $a d$ sera $2 a^2 d^2$ précédé du signe +.

Afin que les Commençans puissent se fortifier dans la pratique de cette regle, j'ai joint dans

la même Table quelques autres exemples.

XLVII.

Sixiéme exemple de résolution d'Equations litterales.

Soit l'Equation $\frac{ab^2 + abd - abx}{d - c} = ax - ac$ on fera d'abord évanouir le Diviseur $d - c$ en multipliant $ax - ac$ par $d - c$; & l'on aura $ab^2 + abd - abx = \overline{ax - ac} \times \overline{d - c}$, ou $ab^2 + abd - abx = adx - acd - acx + acc$ qui, en passant tous les termes affectés d'x d'un côté & les termes connus de l'autre, deviendra $ab^2 + abd + acd - acc = abx + adx - acx$ d'où l'on tire . . . . $x = \frac{ab^2 + abd + acd - ac^2}{ab + ad - ac}$

Dans cette expression, une certaine relation qu'on apperçoit entre les termes du Dividende & ceux du Diviseur, peut faire soupçonner que la Division se feroit exactement, & invite par consequent à tenter cette operation, qui doit paroître assez aisée à faire après avoir vû celle de la multiplication dont elle est l'inverse.

Maniere de faire la division indiquée dans cet exemple.

Pour reconnoître donc si en effet $ab + ad - ac$ peut diviser exactement $ab^2 + abd + acd - ac^2$. Soit d'abord divisé un des termes de cette derniere quantité par un de ceux de la premiere, soit divisé ab^2 par ab par exemple & soit écrit à part le quotient b. Soit ensuite multiplié ce quotient b, ou plûtôt cette premiere partie du quotient cherché, par le Diviseur total $ab + ad - ac$, & soit retranché le produit $ab^2 + abd - abc$ du dividende, le reste $ab^2 + abd + acd - ac^2 - ab^2 - abd + abc$, ou $acd - ac^2 + abc$, sera encore à diviser par le même diviseur, & son

Case 1.

$-13a^2cd+2a^2d^2$

Case 2.

a^4c^4

$-10a^3b^3c^2+12a^4c^4$

$5ab+3ac-cc$ Case 4

$-5ab+3ac-cc$

$5a_2b^2-15a^2bc+5abcc$

$5a^2bc+9a^2c^2-3ac^3$

$abc^2-3ac^3+c^4$

$a^2b^2+9a^2c^2-6ac^3+c^4$

zy Case 5.

$6a^3xy$

$-9a^3y^2$

$+3abxy^2-3a^3xy-9a^3y^2$

quotient devra être ajouté au précédent b pour former le quotient total cherché.

Pour faire cette division je prends encore un des termes de la quantité $acd - ac + abc$ qui reste à diviser, & je le divise par un de ceux du Diviseur. Je choisis acd, par exemple, pour le diviser par ad. Or cette division me donne c; je multiplie donc encore ce nouveau quotient par le diviseur total $ab + ad - ac$ & je retranche le produit $abc + acd - ac^2$ du dividende restant $acd - ac^2 + abc$ & comme les deux quantités sont les mêmes & qu'il ne reste par conséquent rien à diviser, je vois par là que $b + c$ est exactement le quotient de la division de $ab^2 + abd + acd - ac^2$ par $ab + ad - ac$ & partant la valeur d'x.

XLVIII.

Méthode générale pour les divisions des quantités complexes.

Après avoir fait la division précédente, on voit à peu-près comment on doit se conduire dans les autres exemples. Pour operer dans la division avec un certain ordre, on écrit ordinairement le diviseur à droite du Dividende en les séparant d'une barre verticale, ainsi que dans la division Arithmetique. Ayant choisi dans le Dividende un terme qui puisse se diviser par un de ceux du diviseur, on écrit le quotient de ces deux termes sous le diviseur, & on lui donne $+$ pour signe, si les deux termes qu'on a divisé l'un par l'autre ont le même signe, on lui donne au contraire le signe $-$, si ces deux termes sont de signes différens. Cela fait on multiplie ce quotient par tous les termes du diviseur, & on écrit le produit qui en vient sous le dividende.

Mais comme l'usage de ce produit doit être de le retrancher du dividende, on observe en l'écrivant sous ce dividende, de mettre à chaque terme le signe contraire de celui que donneroit la multiplication.

Ce produit étant ainsi écrit, on tire une barre & l'on fait la réduction avec le Dividende, & la quantité qui reste est à diviser de nouveau par le même diviseur. On y choisit de même un terme qui puisse se diviser par un de ceux du diviseur, & on écrit le terme qui en vient pour quotient à côté du premier, en observant de lui donner le signe + ou le signe — suivant que les deux termes qu'on aura divisés, seront de même ou de différens signes. On multiplie ensuite ce terme par tous ceux du diviseur, & on écrit le produit sous la quantité à diviser, en observant de même que la premiere fois de changer les signes que la multiplication donne. Tirant alors une barre & réduisant, si tous les termes ne se détruisent pas, on écrit le reste sous cette barre & on pousse l'opération de la même maniere jusqu'à ce que tous les termes du dividende soient évanouis.

Maniere d'éviter tout tatonnement dans la division.

Dans cette operation on pourroit quelquefois être embarrassé à choisir parmi les termes du dividende & du diviseur, ceux qui doivent servir à former les termes du quotient. Afin d'éviter tout tatonnement dans ce choix, voici ce qu'on a imaginé.

On choisit d'abord à volonté une lettre qui se trouve dans le dividende & dans le diviseur, & l'on dispose les termes de ces deux quantités

de maniere que les premiers soient ceux où cette lettre a le plus grand exposant, que le second soit celui ou la même lettre a le plus grand exposant après le premier & ainsi des autres termes. Ayant donc ordonné les deux quantités proposées par rapport à la même lettre, (c'est ainsi qu'on appelle cette operation) on n'a plus aucun tatonnement à faire pour choisir les termes qui doivent se diviser, c'est toujours les premiers du dividende & du diviseur qu'il faut prendre.

Ce que c'est qu'ordonner une quantité par rapport à une lettre.

Lorsqu'on aura formé par ces deux premiers termes du diviseur & du dividende le premier terme du quotient, & qu'on aura écrit avec des signes differens, le produit sous le dividende, s'il arrive que cette operation ait introduit des termes qui n'ayent point de semblables dans le dividende, Il faudra, en écrivant la quantité qui vient après la réduction, avoir l'attention de les placer de maniere que la quantité qui reste à diviser, reste toujours ordonnée par rapport à la même lettre que le diviseur.

XLIX.

Afin de faciliter aux commençans l'usage de cette méthode, prenons quelques exemples. Supposons d'abord qu'il s'agisse de diviser la quantité $31aabb + 2a^4 + 24b^4 - 38ab^3 - 13a^3b$ par la quantité $-3ab + 2aa + 4bb$.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Ayant écrit ces deux quantités, comme on les voit dans la Table cy-jointe (case Iere), où elles sont ordonnées par rapport à la lettre a, je divise le premier terme $2a^4$ du dividende par le premier $2aa$ du diviseur, & j'écris le

quotient aa sous le diviseur sans lui donner aucun signe, c'est-à-dire que je le fais positif à cause que les termes $2a^4$, & $2aa$ sont précédés des mêmes signes. Le quotient aa étant écrit, je le multiplie par tous les termes du diviseur, & comme cette multiplication doit me donner pour premier terme $2a^4$ produit de aa par $2aa$ avec le signe $+$, je porte ce terme sous le dividende avec le signe $-$ à cause qu'il doit être rétranché.

De même le second terme $3ba^3$ produit de aa par $3ba$ devant avoir le signe $-$ par la multiplication; j'écris sous le dividende $+3ba^3$ par la raison qu'il doit être soustrait. Enfin par ce que le troisiéme terme $4b^2a^2$ produit de aa par $4bb$ devroit avoir par la multiplication le signe $+$ je lui donne le signe $-$ en l'écrivant sous le dividende.

Cela fait je tire une barre & je reduis, la quantité qui reste alors est $10ba^3 + 27b^2a^2 - 38b^3a + 24b^4$ qu'il faut diviser par le même diviseur $2a^2 - 3ba + 4bb$. Pour faire cette division je prens le premier terme $10ba^3$ de cette quantité à diviser, & je le divise par le premier terme $2a^2$ du diviseur, il vient $5ba$ pour quotient auquel je donne le signe $-$ à cause que les termes $10ba^3$ & $2a^2$ ne sont pas précédés des mêmes signes. Ayant écrit $-5ba$ à côté de a^2, il s'agit de multiplier ce nouveau terme du quotient par tous ceux du diviseur, & d'en changer les signes en les écrivant sous la quantité à diviser.

Je multiplie donc d'abord $5ba$ par $2a^2$ &

comme le produit devroit être negatif à cause que le signe — de $5\,ba$ doit changer, suivant les regles de la multiplication, les signes du multiplicande $2a^2 - 3ba + 4b^2$ & que suivant ce que nous venons de dire les produits doivent être changés de signe lorsqu'on les écrit sous la quantité à diviser, j'écris $+ 10\,ba^3$ sous cette quantité. De même au lieu de donner à $15bbaa$, produit de $3\,ba$ par $5ba$, le signe + que l'on auroit par la multiplication je l'écris avec le signe — sous la quantité à diviser. Enfin au lieu de donner à $20\,b^3a$ produit de $5ba$ par $4\,bb$ le signe — que demanderoit la multiplication je l'écris avec le signe + sous la quantité à diviser. Je tire alors une barre & je reduis, ce qui me donne $12\,b^2a^2 - 18\,b^3a + 24\,b^4$ quantité encore à diviser par $2\,a^2 - 3ba + 4bb$.

Pour faire cette nouvelle division, je divise le terme $12\,b^2a^2$ par $2\,a^2$ & j'ai, pour troisiéme terme du quotient, $6\,bb$ que j'écris à côté des deux premiers en lui donnant le signe + à cause que $12\,b^2a^2$ & $2\,aa$ ont le même signe.

Multipliant présentement $6\,b^2$ par $2\,a^2$ j'ai $12\,b^2a^2$ auquel je donne le signe — en l'écrivant sous la quantité à diviser, à cause que la multiplication lui auroit donné le signe +. De même multipliant $6\,b^2$ par $3\,ba$ j'ai $18\,b^3a$ auquel je donne le signe + en l'écrivant sous la quantité à diviser, à cause que la multiplication lui auroit donné le signe —. Enfin multipliant $6\,bb$ par $4b^2$ j'ai $24\,b^2$ auquel je donne le signe — contraire à celui que donneroit la multiplication. Réduisant alors je vois que tous

les termes se détruisent. Donc la division est exacte. Donc le quotient cherché est $aa - 5ba + 6bb$.

L.

Autre exemple.

Qu'on se propose maintenant de diviser $6b^3c - b^4 - 9ccbb + 4c^4$ par $-3cb + bb + 2cc$. J'écris ces deux quantités sous la forme qu'on voit dans la seconde case de la Table suivante, en les ordonnant par rapport à la lettre c.

Divisant alors les deux premiers termes j'ai $2cc$ pour le premier terme du quotient lequel étant multiplié par le diviseur donne, en changeant les signes, la quantité $-4c^4 + 6bc^3 - 2bbcc$ qui étant placée sous le dividende, donne pour reste $6bc^3 - 11bbcc + 6b^3c - b^4$ dans laquelle j'ai observé que le terme bc^3 affecté de c^3 introduit par la multiplication, fut placé le premier afin que la quantité restat ordonnée par rapport à c. Divisant alors ce premier terme $6bc^3$ par $2cc$ j'ai $3bc$ pour quotient avec le signe $+$. Je multiplie de même ce nouveau terme du quotient par le diviseur, & je porte les termes qui en viennent sous le dividende en changeant leurs signes. Faisant la réduction ensuite, Je n'ai plus que $-2bbcc + 3b^3c - b^4$ à diviser, le premier terme de cette quantité étant divisé par celui du diviseur, donne pour troisiéme terme du quotient b^2 affecté du signe $-$ à cause que les termes $2b^2c^2$ & $2c^2$ sont de différens signes, & comme le produit de ce troisiéme terme par le diviseur détruit tous ceux de la quantité à diviser, je conclus

que la division est exacte & que $2cc + 3bc - b^2$ est le quotient demandé.

LI.

Lorsqu'on veut ordonner le dividende & le diviseur par rapport à une même lettre, si on trouvoit plusieurs termes où cette lettre, fut élevée à la même puissance, on tomberoit encore dans l'inconvenient du tatonnement, à moins qu'on n'ordonnat encore ces termes par rapport à une autre lettre commune aux deux quantités.

Attention qu'il faut avoir en ordonnant lorsqu'il y a plusieurs lettres.

Supposons par exemple que le dividende étant ordonné par rapport à la lettre d on eut de suite $3accd^3 - c^3d^3 - 3aacd^3 + a^3d^3$ pour les premiers termes du dividende, & que dans le diviseur on eut de même $aad^2 + ccd^2 - 2acd$ pour les premiers termes, en arrangeant ainsi ces deux quantités $a^3d^3 - 3caad^3 + 3ccad^3 - c^3d^3$; $a^2d^2 - 2cad^2 + ccd^2$ c'est-à-dire en les ordonnant par rapport à la lettre a, il n'y auroit aucun tatonnement à craindre en faisant la division, pourvû qu'on observat, à chaque fois qu'on voudroit trouver un terme du quotient, que la quantité à diviser fut toujours ordonnée de la même maniere. Pour exercer les commençans à ces attentions dans la division, j'ai joint encore quelques exemples dans la Table suivante.

LII.

Dans la solution des Problêmes précédens nous n'avons eu besoin que d'une seule inconnue, parce qu'il n'y avoit à proprement parler dans ces Problêmes qu'une quantité à trou-

ver. Mais comme en avançant dans la ſcience de l'Algebre, on trouve des Problêmes où l'on eſt obligé d'employer pluſieurs inconnues, nous allons voir comment on les traite.

Problème dans lequel on employe deux inconnues.

Etant données les péſanteurs ſpécifiques de deux matieres qui entrent dans un mixte, le volume & le poids total du mixte, trouver ce qu'il entre de chacune de ces deux matieres dans le mixte.

Que le nombre de pouces cubes contenus dans ce mixte, ou en général ſon volume de quelque maniere qu'il ſoit meſuré ſoit exprimé par . . . . a.

Que ſon poids total ſoit exprimé par . . . . . b.

Que la quantité de la premiere matiere contenue dans le mixte, par exemple ce qu'il y a de pouces cubes de cette matiere, ſoit exprimé par . . . . x.

Que le poids d'un pouce cube de cette matiere ou en général ſa péſanteur ſpécifique ſoit c.

La quantité de la ſeconde matiere . . . . . . y.

Sa péſanteur ſpécifique . . . . d.

On aura pour le poids de la quantité de la premiere matiere qui entre dans le mixte . . cx

Car ſi x exprime le nombre de pouces cubes de cette matiere, & c le poids de chaque pouce cube, leur poids total ſera le produit de ces deux nombres. On aura de même pour le poids de la quantité de la ſeconde matiere.. dy.

Or comme ces deux poids doivent étant ajoutés faire le poids total du mixte, on a donc l'Equation

$$cx + dy = b$$

mais cette Equation ne sçauroit suffire pour résoudre le Problême, car si on veut en dégager l'une des inconnues, x, par exemple, on trouve

$$x = \frac{b - dy}{c}$$

qui ne peut apprendre à connoître x qu'en supposant qu'on connoisse y. Il faut donc encore quelqu'autre opération pour connoître y. Pour y parvenir, il faut voir si on a fait attention à tout ce qu'on demandoit dans l'énoncé de la question, ou, pour parler comme les Algebristes, si on a rempli toutes les conditions du Problême; pour peu qu'on y reflechisse, on verra qu'on n'a exprimé qu'une des deux conditions, celle que le poids total du mixte soit b, & qu'on n'a pas employé celle qui nous apprend que la quantité de la premiere matiere ajoutée avec la quantité de la seconde doit faire le volume total. On aura donc par cette seconde condition l'Equation

$$x + y = a$$

qui, ainsi que la premiere, ne nous apprend la valeur de x, qu'au moyen de celle de y, en nous donnant $x = a - y$.

Mais si on ne peut pas par aucune de ces deux Equations prises séparément trouver x indépendamment de y, on trouve bien-tôt en se servant à la fois de l'une & de l'autre, le moyen d'avoir y entierement connu. Car puisque chacune de ces deux Equations donne une valeur de x, on peut égaler ces deux valeurs, ce qui donne l'Equation.

$$\frac{b-dy}{c}=a-y$$

de laquelle on tire par les méthodes précédentes $b-dy=ac-cy$ ou $ac-b=cy-dy$, ou enfin $y=\frac{ac-b}{c-d}$.

y étant connû on voit bien que x qui est également $a-y$ ou $\frac{b-dy}{a-c}$ est connu aussi. On n'a donc qu'à mettre dans celle qu'on voudra de ces deux quantités, dans la premiere $a-y$ par exemple, à la place de y, $\frac{ac-b}{d-c}$, & l'on aura $a-\frac{ac-b}{c-d}$ pour la valeur de x.

En examinant la valeur précédente $a-\frac{ac-b}{c-d}$ on découvre bien-tôt qu'on peut la réduire, car si on veut mettre a au même dénominateur que la fraction $\frac{ac-b}{c-d}$, il faut le multiplier par $c-d$, ce qui donne $\frac{ac-ad}{c-d}$ au lieu de a, ainsi il ne s'agit plus que de retrancher de cette fraction la seconde $\frac{ac-b}{c-d}$, retranchant pour cela leurs numérateurs, & divisant le reste par le denominateur commun on aura $\frac{ac-ad-ac+b}{c-d}$ ou $\frac{b-ad}{c-d}$ pour la valeur réduite de x.

Les quantités demandées, tant de la premiere que de la seconde matiere qui entrent dans le mixte, sont donc exprimées l'une par $\frac{ac-b}{c-d}$ & l'autre par $\frac{b-ad}{c-d}$, ainsi le Problême est résolu.

LIII.

Si au lieu de fubftituer la valeur $\frac{ac-b}{c-d}$ de y dans $a-y$, on l'avoit fubftituée dans $\frac{b-dy}{c}$ qui eft également la valeur de x on auroit eu $\frac{b-d\times\overline{\frac{ac-b}{c-d}}}{c}$ qui d'abord ne paroît gueres être la même valeur que $\frac{b-ad}{c-d}$. Mais comme on fçait que les valeurs $a-y$ & $\frac{b-dy}{c}$ de x font égales, & que ce n'eft même que parce qu'elles le font qu'on a déterminé la valeur de y, on doit être sûr qu'en examinant ces deux dernieres valeurs de x exprimées en quantités connues, on trouvera leur identité. Voici comment, on peut parvenir à réduire l'uneà l'autre.

On donnera d'abord le denominateur $c-d$ à la lettre b, ce qui fe fera en la multipliant par $c-d$, c'eft-à-dire en mettant $\frac{bc-bd}{c-d}$ au lieu de b, & alors la quantité précédente $\frac{b-\frac{d\times\overline{ac-b}}{c-d}}{c}$ fe changera en $\frac{\frac{bc-bd-d\times\overline{ac-b}}{c-d}}{c}$ ou $\frac{bc-bd-d\times\overline{ac-b}}{cc-dc}$, mais au lieu $d\times\overline{ac-b}$ on peut écrire $acd-bd$, & comme cette quantité doit être retranchée de $bc-bd$, la quantité précédente $\frac{bc-bd-d\times\overline{ac-b}}{cc-dc}$ deviendra donc en réduifant, $\frac{bc-dca}{c^2-dc}$ qui en divifant le numerateur & le dénominateur par la même quan-

tité c, devient enfin $\frac{b-da}{c-d}$ même valeur que cy-dessus.

LIV.

Application de la solution précédente à un exemple.

Pour faire présentement une application de la solution générale qu'on vient de trouver, supposons que le mixte soit composé d'or & d'argent, * que son poids total soit de 30 onces, son volume de 3 pouces cubes, le poids du pouce cube d'or de $12\frac{2}{3}$ onces, celui du pouce cube d'argent de $6\frac{8}{9}$ onces
on aura $a=3$, $b=30$, $c=12\frac{2}{3}$, $d=6\frac{8}{9}$ substituant donc ces valeurs dans les deux formules générales $x=\frac{b-da}{c-d}$ & $y=\frac{ac-b}{c-d}$, elles deviendront $x=\frac{21}{13}$ & $y=\frac{18}{13}$ c'est-à-dire que le mixte contiendra $\frac{21}{13}$ pouces cubes d'or & $\frac{18}{13}$ pouces cubes d'argent.

LV.

On découvre aisément par ce qu'on a vû dans le Problême précédent, que toutes les fois qu'on aura employé deux inconnues dans une question, il faudra deux Equations pour les dégager; & que lorsqu'on demande deux quantités dans un Problême, il faut aussi qu'on donne deux conditions pour les déterminer, afin qu'on

* Le Problême qu'Archimede eut à résoudre, lorsqu'on lui proposa de déterminer la quantité d'argent qui étoit allié avec l'or dans la Couronne du Roi Hieron, ne pouvoit pas être autre chose que celui qu'on vient de voir aussi-tôt qu'il eut déterminé la pésanteur spécifique du metal de cette Couronne, ce qu'il fit en examinant de combien elle perdoit de son poids en la pésant dans l'eau.

puisse

puisse tirer de ces deux conditions les deux équations nécessaires. Pour montrer à employer ces conditions nous donnerons encore le Problême suivant.

LVI.

Deux sources qui coulent chacune uniformement, ont rempli ensemble un reservoir a, *l'une en coulant pendant un tems* b, *l'autre pendant un tems* c; *les deux même sources ont rempli un autre reservoir* d, *la premiere coulant pendant le tems* e, *la seconde pendant le tems* f: *on demande la dépense de chacune de ces sources.*

Autre Problême où l'on employe deux inconnues.

Soient x & y ces dépenses, c'est-à-dire, par exemple, ce que chacune de ces deux sources fourniroit de muids d'eau par jour en supposant que les réservoirs a & d fussent mesurés en muids pendant que les tems b, c, e, f, seroient comptés en jours.

On aura bx pour la quantité d'eau fournie par la premiere source pendant le tems b; & de même cy pour la quantité d'eau fournie par la seconde source dans le tems c. Mais ces deux quantités d'eau par la premiere condition du Problême doivent être égales au reservoir a, on a donc l'Equation

$$bx + cy = a$$

On aura de même ex, fy pour les quantités d'eau fournies par les mêmes sources pendant les tems e, f, & par consequent la seconde condition donnera

$$ex + fy = d$$

Il ne s'agit plus maintenant que de tirer de ces deux Equations les valeurs de x & de y

ce qui ſe fera, ainſi que dans le Problême précédent, en tirant une valeur de x en y de chacune de ces deux Equations & en les égalant enſuite. La premiere ſera $\frac{a-cy}{b}$ la ſeconde $\frac{d-fy}{e}$ égalant donc ces deux valeurs on aura $\frac{a-cy}{b} = \frac{d-fy}{e}$ ou $ae - cey = bd - bfy$, ou $ae - bd = cey - bfy$ ou enfin

$$y = \frac{ae-bd}{ce-bf}.$$

Subſtituant cette valeur de y dans l'une des deux valeurs précédentes de x, dans $\frac{a-cy}{b}$ par exemple, il viendra $x = \frac{a - c \times \overline{\frac{ae-bd}{ce-bf}}}{b}$ ou $x = \frac{a \times \overline{ce-bf} - c \times \overline{ae-bd}}{b \times \overline{ce-bf}}$ en mettant le premier terme a au même dénominateur que le ſecond, & en multipliant les deux dénominateurs l'un par l'autre.

Faiſant enſuite les multiplications indiquées dans cette valeur & réduiſant on aura

$$x = \frac{cd-af}{ce-bf}.$$

Il n'eſt donc plus queſtion maintenant que d'avoir les valeurs particulieres de a, b, c, d, e, f, pour les ſubſtituer dans ces deux valeurs générales de x & de y, afin d'en tirer telle ſolution particuliere qu'on voudra.

Au lieu de commencer par dégager x dans les deux Equations précédentes, & d'égaler les deux valeurs qu'elles donnent, afin d'avoir y il eſt clair qu'on pouvoit également commen-

cer par dégager y en égalant enſuite ſes deux différentes valeurs pour en tirer x, & que par cette opération on ſeroit parvenu néceſſairement au même reſultat.

LVII.

Pour faire préſentement quelque application de ce Problême, ſuppoſons que la premiere ſource ayant coulé deux jours & la ſeconde trois, elles ayent rempli un reſervoir de 195 muids. Enſuite que la premiere ſource ayant coulé cinq jours, & la ſeconde quatre, elles ayent rempli un reſervoir de 330 muids. *Exemple du Problême précédent en nombres.*

On aura donc $a = 195$, $b = 2$, $c = 3$ $d = 330$, $e = 5$, $f = 4$ & par conſequent $dc - af = 210$, $ce - bf = 7$, $ae - db = 315$

d' où $x = \frac{dc - af}{ce - bf} = \frac{210}{7} = 30$

& $y = \frac{ae - bd}{ce - bf} = \frac{315}{7} = 45$

ainſi la premiere ſource dans cet exemple fournit 30 muids par jour & la ſeconde 45.

LVIII.

Suppoſons préſentement que la premiere ſource ayant coulé pendant 4 jours & la ſeconde pendant 6 jours, elles ayent rempli un reſervoir de 120 muids. Enſuite que la premiere ayant coulé 3 jours & la ſeconde 7, elles ayent rempli un reſervoir de 190 muids. *Autre exemple.*

On aura dans ce cas $a = 120$, $b = 4$, $c = 6$ $d = 190$, $e = 3$, $f = 7$ & par conſequent $dc - f = 300$, $ce - bf = -10$, $ae - bd = -400$

ce qui donnera $x = \frac{dc - af}{ce - bf} = \frac{300}{-10}$

& $y = \frac{ae - db}{ce - bf} = \frac{-400}{-10}$

Singularité des expressions où l'on arrive dans cet exemple.

La premiere fois qu'on aura trouvé de semblables valeurs, c'eſt-à-dire des quantités négatives diviſées par des quantités négatives, & des poſitives diviſées par des négatives, on aura dû être embarraſſé à ſçavoir ce qu'elles devoient ſignifier, & ceux qui auront craint de faire de mauvais argumens methaphyſiques, auront cherché à reprendre la queſtion un peu plus haut, afin d'éviter ces ſortes de diviſions; Voici, par exemple, ce qu'on aura pû faire pour cela dans cette queſtion cy.

Maniere de reconnoître ce qu'elles peuvent ſignifier.

On aura repris les deux Equations générales $bx + cy = a$, & $ex + fy = d$, & ſubſtituant dans ces équations pour a, b, c, d, e, f, les valeurs que ces lettres ont dans cet exemple on aura eu $4x + 6y = 120$ & $3x + 7y = 190$. Tirant de ces Equations $x = 30 - \frac{3y}{2}$ & $x = \frac{190}{3} - \frac{7}{3}y$, on aura égalé ces deux valeurs, ce qui aura donné $30 - \frac{3y}{2} = \frac{190}{3} - \frac{7y}{2}$ ou $\frac{7}{3}y - \frac{3}{2}y = \frac{190}{3} - 30$ ou $y = 40$.

Subſtituant enſuite cette valeur de y dans $30 - \frac{3}{2}y$ valeur de x, on aura eu $x = 30 - 60$, c'eſt-à-dire $x = -30$. Par cette voye on aura vû, ſans en pouvoir douter, que le quotient de -400 par -10 eſt $+40$, & que celui de $+300$ par -10 eſt -30.

LIX.

Théoremes généraux

On aura bien-tôt après regardé comme des

principes généraux que concernant les fignes des quotients ou des produits.

le + divifé par le + donnoit le +
le + divifé par le — donnoit le —
le — divifé par le + donnoit le —
le — divifé par le — donnoit le +.
& de même pour la multiplication.

Ces principes auront été d'autant plus faciles à imaginer qu'on y étoit comme conduit, par les reflexions qu'on avoit dû faire fur les fignes qu'on trouvoit aux termes des produits & des quotients, en pratiquant les préceptes donnés pour la multiplication & pour la divifion des quantités complexes.

Mais s'il eft facile qu'on fe doute pour ainfi dire des ces principes, on fent bien auffi qu'on ne fçauroit les affirmer qu'après y avoir fait beaucoup de reflexions, & il y a apparence que les premiers Analyftes n'en auront été furs qu'après les avoir verifiés dans beaucoupd'exemples.

LX.

On démontre que $-b$ par $-d$ eft $+bd$; quoique ces quantités ne foient précédées de rien.

Pour nous affurer que la multiplication de — par — doit toujours donner + au produit, voyons quelle lumiere nous pouvons tirer de la méthode générale des multiplications donnée Art. XLV. Suivant cette méthode on voit très-clairement que le produit d'une quantité telle que $a-b$ par une autre $c-d$ doit être $ac-bc-ad+bd$, & on voit par confequent en même tems que le terme bd qui eft venu par la multiplication de b & de d a le figne +, tandis que fes produifans b & d ont le figne —. Il ne refte donc plus qu'à fçavoir fi lorfque deux quantités négatives telles que $-b$ & $-d$ ne fe-

ront précédées d'aucune quantité positive, leur produit sera encore $+ bd$. Or c'est ce dont il est facile de reconnoître la vérité, puisque la méthode par laquelle on a découvert que le produit de $a-b$ par $c-d$ étoit $ac-bc-ad+bd$ ne specifiant aucune grandeur particuliere ni à a ni à b, doit avoir encore lieu lorsque ces quantités sont égales à zero; or en ce cas le produit $ac-bc-ad+bd$ se reduit à $+bd$, donc $-b \times -d = +bd$.

LXI.

Les autres cas se démontreroient de même.

Quant aux autres cas, c'est-à-dire à la multiplication & à la division de + par − on les justifieroit de la même maniere.

LXII.

Comment la valeur negative qu'on a trouvée resout le Problême.

Pour revenir présentement à notre derniere application du Problême précédent, remarquons qu'après avoir trouvé que $x = -30$ & $y = +40$, on a dû avoir encore une autre espece d'embarras, c'étoit de sçavoir ce que signifioit cette valeur de x, pour le découvrir surement, le chemin qu'il est vraisemblable qu'on aura tenu, c'est de remonter aux conditions du Problême ou, ce qui revient au même, aux Equations $4x+6y=120$ & $3x+7y=190$ qui les expriment alors, & de voir comment les valeurs -30 & $+40$ de x & de y conviennent à ces Equations. On trouve premierement que $4x$ doit être en ce cas -120 & que $6y$ est 240, d'où par consequent $4x+6y$ est $-120+240$ qui est en effet égal à 120. On trouve de même que $3x+7y$ est $-90+280$ qui se réduit à 190.

Voyant donc comment les valeurs -30 & $+40$ de x & de y, satisfont aux Equations $4x+6y=120$ & $3x+7y=190$, on découvre en méme-tems comment elles satisfont aux conditions du Problême; car puisque l'usage que l'on fait des quantités $4x$ & $3x$ qui expriment alors les quantités d'eau dépensées par la premiere source, dans la premiere & dans la seconde opération, est de les retrancher de $6y$ & de $7y$ qui expriment les quantités d'eau fournies dans les mêmes opérations par la seconde source, il faut que dans ce cas, on regarde la premiere source comme dérobant de l'eau aux reservoirs, au lieu d'en fournir comme elle faisoit dans l'autre exemple, & comme on l'avoit supposé en exprimant les conditions du Problême.

L'on voit en cette occasion un exemple de la généralité de l'Analyse qui fait trouver dans une question des cas que l'on n'avoit pas prévû dabord pouvoir y être renfermés.

LXIII.

Les inconnues devenant négatives, doivent être prises dans un sens différent de celui de l'énoncé du Problême.

Dans presque toutes les questions résolues généralement, on a trouvé des cas de même nature que le précédent, & l'on en a toujours conclu, que lorsque la valeur de l'inconnue devenoit négative; la quantité qu'elle exprimoit devoit être prise dans un sens contraire à celui suivant lequel on l'avoit employée en exprimant les conditions du Problême.

Ce qu'on vient de dire des inconnues, se doit dire aussi des connues, c'est-à-dire que dans

Il en est de même des connues.

les applications qu'on fera d'une solution générale, si on fait négatives quelques-unes des quantités données a, b, &c. dans les Problêmes, cela signifiera que dans l'application particuliere, ces quantités doivent être prises dans un sens contraire à celui suivant lequel on les prenoit dans la solution générale.

LXIV.

Exemple de l'usage des quantités connues faites négatives.

Qu'on se propose, par exemple, de trouver quelles doivent être dans le Problême précédent les dépenses des deux sources, pour que la seconde fournissant de l'eau pendant 6 jours tandis que la premiere en dérobe pendant 3 jours, un reservoir de 180 muids soit rempli; & que la premiere source ensuite fournissant de l'eau pendant 3 jours & la seconde pendant 4 jours, un reservoir de 320 muids soit rempli.

On n'aura qu'à faire dans la solution générale $a = 180$, $b = -3$, $c = 6$, $d = 320$, $e = 3$, $f = 4$.

Et l'on aura $dc = 1920$, $af = 720$, $ce = 18$, $bf = -12$, $ae = 540$, $db = -960$, & par conséquent $dc - af = 1200$, $ce - bf = 30$, $ae - db = 1500$, qui donnent $x = \frac{dc - af}{ce - bf} = 40$ & $y = \frac{ae - db}{ce - bf} = 50$, par lesquelles on apprend que la dépense de la premiere source est de 40 muids par jour, soit pour dérober comme elle fait dans la premiere opération, soit pour fournir ainsi qu'il lui arrive dans la seconde; & que la dépense de la seconde est de 50 muids par jour qu'elle

fournit dans chacune des deux opérations. Il étoit si naturel d'imaginer que *b* devoit être négatif dans cette application, & si aisé de s'en assurer en remontant à l'usage qu'on fait de cette lettre en exprimant les conditions du Problême, qu'il est inutile de s'arrêter à le faire voir.

LXV.

Pour faciliter aux Commençans la maniere d'étendre les solutions des Problêmes aux cas où les quantités données sont prises dans un sens contraire à celui où elles avoient été prises d'abord, nous prendrons encore un exemple dans un autre Problême que le précédent, nous reprendrons le Problême de l'art. XXIV. où il s'agit de trouver la rencontre de deux Courriers, & nous chercherons à tirer de la solution générale celle du cas suivant.

Deux Courriers sont à la distance de 50 lieues, l'un étant par exemple à Lille, l'autre à Paris. Le premier part de Lille à 8 heures du soir pour aller à Paris en faisant 4 lieues par heure. Le second part le même jour de Paris à 11 heures du matin pour aller à Lille, & fait 3 lieues par heure, on demande à quelle distance de Paris ils se rencontreront.

Autre exemple du même usage des quantités connues faites négatives.

En comparant cet énoncé avec celui du Problême général, on voit d'abord que la lettre *c* qui exprimoit la marche du premier Courrier dans un tems donné doit être négative, puisque dans la solution générale, on supposoit que le premier Courrier s'éloignoit, & qu'il vient dans ce cas-ci au-devant du second. On voit ensuite que la lettre *b* qui exprimoit le nombre

d'heures d'avance du premier Courrier doit être auſſi négative, puiſqu'il eſt parti plus tard.

Ainſi on n'aura qu'à faire dans la formule générale $x = \frac{ade + bce}{de - cf}$, $a = 50$, $b = -9$, $c = -4$, $d = 1$, $e = 3$, $f = 1$, & l'on aura $x = \frac{50 \times 1 \times 3 - 9 \times -4 \times 3}{1 \times 3 + 4 \times 1} = \frac{150 + 108}{3 + 4}$ $= \frac{258}{7} = 36\frac{6}{7}$ qui apprend que lorſque le Courrier de Paris aura fait $36\frac{6}{7}$ lieues il aura joint celui de Lille.

LXVI.

Deux Equations du premier dégré à deux inconnues, peuvent toujours être rapportées aux précédentes.

Un des uſages des plus étendus de l'Algebre & qui montre le mieux l'avantage qu'on a de prendre à volonté, ainſi qu'on vient de faire, les ſignes des quantités données en général dans les Problêmes, c'eſt de rapporter à la ſolution des Equations qu'on a priſes généralement, toutes celles dans leſquelles les inconnues ſont diſpoſées de la même maniere, mais avec des ſignes & des coefficiens quelconques. Par exemple avec les deux Equations $bx + cy = a$ & $ex + fy = d$ qu'on a réſolues dans l'art. LVI. on réſoudra toujours deux Equations du premier dégré quelles qu'elles ſoient, pourvû qu'elles ne renferment que deux inconnues.

Exemple.

Qu'on ait, par exemple, à réſoudre les deux Equations $mnx = ppy - hhg$ & $mny = p^3 - nnx$. Pour les comparer aux premieres, on commencera par les écrire ainſi

$mnx - p^2y = -hhg$ & $nnx + nmy = p^3$

les comparant alors terme à terme avec les deux Equations

$bx + cy = a$ & $ex + fy = d$.

La premiere avec la premiere, & la seconde avec la seconde, on aura
$b = mn$, $c = -p^2$, $a = -hhg$, $e = n^2$, $f = mn$, $d = p^3$.

Ce qui donnera $cd = -p^5$, $af = -mnhhg$ $ce = -p^2n^2$, $bf = mmnn$, $ae = -h^2n^2g$, $bd = mnp^3$,
& par conséquent $cd - af = -p^5 + mnhhg$ $ce - bf = -m^2n^2 - p^2n^2$; $ae - bd = -h^2n^2g - mnp^3$.

Or substituant ces valeurs dans les formules générales $x = \frac{cd-af}{ce-bf}$ & $y = \frac{ae-bd}{ce-bf}$, on aura enfin $x = \frac{p^5 - mnh^2g}{m^2n^2 + p^2n^2}$ . . . . & $y = \frac{h^2gn^2 + mnp^3}{m^2n^2 + p^2n^2}$.

LXVII.

Supposons présentement qu'on ait les Equations $\frac{3mpx}{p-q} = \frac{ppy}{p+q} - \frac{2nq}{p-q}$ & $mx + \overline{p+q} \times y = \frac{qn}{p-q}$ en mettant la premiere sous cette forme $\frac{3mpx}{p-q} - \frac{pp}{p+q}y = -\frac{2nq}{p-q}$ on aura en la comparant à l'Equation générale $bx + cy = a$, $b = \frac{3mp}{p-q}$, $c = -\frac{pp}{p+q}$, $a = -\frac{2nq}{p-q}$, & en comparant la seconde à l'Equation $ex + fy = d$ on aura $e = m$, $f = p + q$, $d = \frac{qn}{p-q}$ & ces valeurs étant substituées dans la formule $x = \frac{cd-af}{ce-bf}$ donneront . . . .

Autre exemple.

*

$$x = \frac{-\frac{pp}{p+q}\times\frac{qn}{p-q}+\frac{2nq}{p-q}\times\overline{p+q}}{-\frac{pp}{p+q}\times m-\frac{3mp}{p-q}\times\overline{p+q}}.$$

Pour réduire cette quantité, je commence par multiplier le numerateur & le dénominateur de la fraction $\frac{2nq\times\overline{p+q}}{p-q}$ par $p+q$ ce qui la change en $\frac{2nq\times\overline{p+q}^2}{\overline{p-q}\times\overline{p+q}}$, par ce moyen le numérateur entier de la valeur de x devient $\frac{-pp\times qn+2nq\times\overline{p+q}^2}{\overline{p-q}\times\overline{p+q}}$ ou $\frac{qn\times\overline{2\times\overline{p+q}^2-pp}}{\overline{p-q}\times\overline{p+q}}$ ou $qn\times\frac{\overline{pp+4pq+2qq}}{\overline{p-q}\times\overline{p+q}}$.

Je travaille ensuite sur le dénominateur de la valeur de x, en mettant ses deux parties au même dénominateur, ce qui donne ......
$\frac{-p^2\times\overline{p-q}\times m-3mp\times\overline{p+q}^2}{\overline{p+q}\times\overline{p-q}}$ ou $\frac{-mp\times\overline{pp-pq+3\times\overline{p+q}^2}}{\overline{p+q}\times\overline{p-q}}$ ou enfin $-\frac{mp\times\overline{4pp+5pq+3qq}}{\overline{p+q}\times\overline{p-q}}$. Ces deux opérations changent la valeur précédente de x en

$$\frac{qn\times\frac{\overline{pp+4pq+2qq}}{\overline{p+q}\times\overline{p-q}}}{-mp\times\frac{\overline{4pp+5pq+3qq}}{\overline{p+q}\times\overline{p-q}}},$$

mais comme le numerateur & le dénominateur de cette fraction sont chacun divisés par $\overline{p+q}\times\overline{p-q}$, j'ôte ce divifeur ; & la valeur de x devient

$\frac{qn\times\overline{pp+4pq+2qq}}{-mp\times\overline{4pp+5pq+3qq}}$ ou $-\frac{qn\times\overline{pp+4pq+2qq}}{mp\times\overline{4pp+5pq+3qq}}$ ou $-\frac{qn}{mp}\times\frac{pp+4pq+2qq}{4pp+5pq+3qq}$ ou enfin ......
$x=\frac{-nqpp-4pqqn-2nq^3}{4mp^3+5mp^2q+3mpqq}$ ſubſtituant maintenant les mêmes valeurs de $a, b, c,$ &c. dans la formule générale .... $y=\frac{ae-bd}{ce-bf}$ on aura $y=\frac{-\frac{2nq}{p-q}\times m-\frac{3mp}{p-q}\times\frac{qn}{p-q}}{-\frac{pp}{p+q}\times m-\frac{3mp}{p-q}\times\overline{p+q}}$ au numerateur de laquelle je donne cette forme $\frac{-2mnq\times\overline{p-q}-3mpqn}{\overline{p-q}^2}$, en multipliant le numerateur & le dénominateur de la fraction $-\frac{2nqm}{p-q}$ par $p-q$. Je réduis enſuite cette nouvelle forme, & elle devient $\frac{mnq\times\overline{-5p+2q}}{\overline{p-q}^2}$

Quant au dénominateur de la valeur de y, comme il eſt le même que celui de la valeur de x, il ſe réduira de même, & l'on aura

partant $y = \frac{mnq\times\frac{2q-5p}{\overline{p-q}^2}}{-mp\times\frac{4pp+5pq+3qq}{\overline{p+q}\times\overline{p-q}}}$ ou en effaçant les diviſeurs communs $p-q$ & en réduiſant, $y=\frac{qn\times\frac{\overline{5p-2q}}{p-q}}{p\times\frac{4pp+5pq+3qq}{p+q}}$ qui en fai-

ſans paſſer le diviſeur $p+q$ en haut, & le diviſeur $p-q$ en bas ſuivant les regles des diviſions des fractions, devient enfin ....

$$y = \frac{qn \times \overline{p+q} \times \overline{5p-2q}}{p \times \overline{p-q} \times \overline{4p^2+5pq+3qq}}$$

$$\text{ou } y = \frac{-2qn + 5p^2\,qn + 3pq^2n}{-2p^2q^2+4p^4+p^3q-3pq^3}$$

LXVIII.

Autre maniere de réſoudre le même exemple.

Si pour réſoudre les Equations propoſées dans cet exemple, on avoit commencé par delivrer de fractions ces Equations le calcul qu'on auroit fait de la maniere ſuivante auroit donné moins d'embarras de la part des diviſeurs.

Soient multipliés d'abord les deux membres de l'Equation $\frac{3mpx}{p-q} = \frac{ppy}{p+q} - \frac{2qn}{p-q}$ ou $\frac{3mpx}{p-q} - \frac{ppy}{p+q} = -\frac{2nq}{p-q}$ par $pp-qq$ produit des deux diviſeurs $p-q$, $p+q$ & l'on aura l'Equation $\overline{3mpp+3mpq} \times x + \overline{ppq-p^3} \times y = -2npq-2nqq$.

Soient multipliés de même les deux membres de l'Equation $mx + \overline{p+q} \times y = \frac{nq}{p-q}$ par $p-q$ & l'on aura $\overline{mp-mq} \times x + \overline{pp-qq} \times y = qn$

Comparant préſentement ces deux nouvelles Equations avec les deux formules générales on a $l=3mpp+3mpq$, $c=ppq-p^3$, $a=-2npq-2nq^2$, $e=mp-mq$, $f=p^2-q^2$, $d=qn$

D'où l'on tire $cd=p^2q^2n-p^3qn$, $af=-$

$2np^3q - 2np^2q^2 + 2pq^3n + 2nq^4$, $ae = 2nmq^3 - 2nmp^2q$, $bd = 3mnp^2q + 3mnpq^2$; $ce = 2p^3qm - mp^4 - mp^2q^2$; $bf = 3mp^3q + 3mp^4 - 3mpq^3 - 3mp^2q^2$

& partant $cd - af = qnp^3 + 3p^2q^2n - 2npq^3 - 2nq^4$

$ce - bf = 2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3$

$ae - bd = 2nmq^3 - 5mnp^2q - 3mnpq$ qui

donnent $x = \frac{qnp^3 + 3ppqqn - 2npq^3 - 2nq^4}{2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3}$

& $y = \frac{2nmq^3 - 5mnp^2q - 3mnpqq}{2mppqq - 4mp^4 - mpq + 3mpq^3}$

LXIX.

Comparaiſon des deux ſolutions précédentes.

Si on compare préſentement ces deux valeurs de x & de y avec celles qu'on avoit trouvées précédemment, on voit d'abord ſans aucune difficulté l'identité des deux valeurs de y. Quant aux valeurs de x, pour ſçavoir comment la premiere peut être la même choſe que la ſeconde, il faut remarquer que l'égalité qui doit être entre ces deux expreſſions, ſuppoſe néceſſairement que le numérateur $qnp^3 + 3nppqq - 2npq^3 - 2nq^4$ de la ſeconde contienne le numérateur $-qnpp - 4pq^2n - 2q^3n$ de la premiere, de la même maniere que le dénominateur $2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3$ de la ſeconde contient le dénominateur $4p^3m + 5p^2qm + 3mpq^2$ de la premiere. Or en prenant la peine de diviſer le ſecond numérateur par le premier, on trouve en effet le même quotient $p - q$ qu'en diviſant le ſecond dénominateur par le premier. C'eſt-à-dire que l'expreſſion......

$\frac{qnp^3 + 3ppqqn - 2npq^3 - nq^4}{2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3}$ ſe change en

$\frac{\overline{p-q} \times \overline{-nqpp - 4pqqn - nq^3}}{\overline{p-q} \times 4mp^3 + 5mp^2q + 3mpq^2}$ ou en

$\frac{-nqpp - 4pqqn - 2nq^3}{4mp^3 + 5mp^2q + 3mpq^2}$ en ôtant les diviſeurs communs $p-q$.

LXX.

La maniere dont on vient de réduire la plus compoſée des deux valeurs de x à la plus ſimple étoit aiſée à imaginer lorſqu'on ſçavoit l'une & l'autre de ces deux expreſſions, mais ſi on n'eût connu que la plus compoſée & qu'on eût voulu la ſimplifier, on auroit été beaucoup plus embarraſſé, puiſqu'on n'auroit pas ſçû par quelle quantité il falloit diviſer le numérateur & le dénominateur de la fraction. Or, comme ce ſeroit un vice dans la ſolution d'un Problême qu'une valeur d'x réductible & non réduite, il faut chercher une méthode pour réduire toute fraction qui peut ſe réduire, ou ce qui revient au même, il faut chercher une méthode pour trouver quel eſt le plus grand diviſeur commun que puiſſent avoir deux quantités données.

Suppoſons d'abord, pour aller du plus ſimple au plus compoſé que ces deux quantités ne ſoient que des nombres; que l'on ait, par exemple, à chercher le plus grand diviſeur commun des nombres 637 & 143 ou, ce qui revient au même, que l'on ſe propoſe de réduire la fraction $\frac{637}{143}$ à ſa plus ſimple expreſſion.

Diviſant

Divisant d'abord 637 par 143 il vient 4 pour quotient & 65 pour reste, c'est-à-dire, que la fraction $\frac{637}{143}$ se change en $4 + \frac{65}{143}$, d'où la question est réduite à abbaisser la fraction $\frac{65}{143}$, ou ce qui revient au même, à chercher le nombre qui est le plus grand commun diviseur des nombres 143 & 65. Car lorsque ce nombre sera trouvé, il est évident qu'il sera aussi le plus grand commun diviseur des nombres 637 & 143, puisqu'on ne sçauroit réduire la fraction $\frac{65}{143}$ à sa plus simple expression, qu'on ne réduise en même-tems $4 + \frac{65}{143}$ ou $\frac{637}{143}$ à sa plus simple expression.

Les deux nombres 143 & 65 sur lesquels il s'agit d'opérer présentement étant plus simples que les deux premiers 637 & 143, je vois que la difficulté est diminuée, & qu'en s'y prenant de la même maniere on la diminuera encore. Au lieu de la fraction $\frac{65}{143}$ à réduire, j'écris $\frac{143}{65}$ non que je prétende que ces fractions soient les mêmes, mais parce qu'on ne sçauroit réduire l'une, que l'autre ne se réduise de la même maniere. Ensuite pour réduire $\frac{143}{65}$ je divise 143 par 65, ce qui me donne 2 pour quotient, & 13 pour reste. Il ne faut donc plus, par le même principe, que chercher le plus grand commun diviseur de 13 & de 65. Car on voit que le plus grand commun diviseur de ces deux nombres sera aussi celui de 143 & de 65, à cause que la fraction $\frac{143}{65}$ se change en $2 + \frac{13}{65}$.

Présentement le plus grand commun diviseur de 13 & de 65 est 13 lui-même, puisqu'il

divise exactement 65. Donc 13 est aussi le plus grand commun diviseur de 143 & de 65, donc il est aussi celui des nombres proposés 637, 143. En effet 637 est 49 × 13 & 143, 11 × 13, d'où l'on tire $\frac{637}{143} = \frac{49}{11}$ fraction irréductible.

LXXI.

Méthode générale de trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres.

On peut s'assurer facilement que la méthode qu'on vient de suivre dans l'exemple précédent peut s'appliquer à quelques nombres que ce soit. Qu'on ait en général deux nombres *A* & *B*, & que le quotient de la division du premier par le second soit *a* & le reste *C*, la question sera réduite à trouver le plus grand commun diviseur de *B* & de *C*; *b* étant supposé alors le quotient de *B* par *C*, & *D* le reste, il ne s'agira plus que de trouver le plus grand commun diviseur de *C* & de *D*, c'est-à-dire, de diviser *C* par *D*, & de se servir du reste pour diviser *D*. Allant ainsi de division en division jusqu'à ce qu'on arrive à deux nombres dont le plus petit soit contenu exactement dans le plus grand, ce nombre contenu exactement sera le plus grand diviseur commun des deux premiers nombres *A* & *B*.

Cette regle dans toute sa généralité, comme dans l'exemple précédent, est fondée sur ce que la fraction $\frac{A}{B}$ devenant $a + \frac{C}{B}$ ne sçauroit s'abbaisser que lorsque $\frac{C}{B}$ s'abbaisse, que $\frac{C}{B}$ ne sçauroit se réduire que de la même maniere que $\frac{B}{C}$, & que $\frac{B}{C}$ étant $b + \frac{C}{D}$ ne sçauroit se réduire sans que $\frac{C}{D}$ se réduise & ainsi de suite.

LXXII.

Voyons présentement quels sont les changemens qu'il faut faire à cette méthode pour l'appliquer aux quantités Algebriques, & pour plus de clarté prenons d'abord un exemple.

Supposons qu'il s'agisse de trouver le plus grand commun diviseur des quantités $3a^3 - 3baa + bba - b^3$ & $4aa - 5ba + bb$. Il faudroit, suivant la méthode précédente, diviser la premiere de ces deux quantités par la seconde; mais comme la division ne sçauroit se faire à cause que le premier terme $3a^3$ du dividende ne contient pas exactement le premier terme du diviseur, je multiplie toute la premiere quantité par 4, & je remarque que 4 n'étant point un des diviseurs de la seconde quantité $4aa - 5ba + bb$, il ne peut pas y avoir d'autre plus grand commun diviseur entre $12a^3 - 12baa + 4bba - 4b^3$ & $4aa - 5ba + bb$ qu'entre $3a^3 - 3baa + bba - b^3$ & $4aa - 5ba + bb$.

Je divise alors suivant les regles précédentes $12a^3 - 12ba^2 + 4b^2a - 4b^3$ par $4a^2 - 5ba + bb$; jai pour quotient $3a$, & pour reste $3baa + bba - 4b^3$, ce qui, suivant les mêmes regles, demanderoit qu'on divisât $4a^2 - 5ba + bb$ par $3baa + bba - 4b^3$, mais comme la division de ces quantités ne sçauroit se faire sans les préparer auparavant, je remarque d'abord que b étant commun à tous les termes de la derniere quantité & ne l'étant pas à ceux de la seconde, il ne sçauroit être partie du plus grand commun diviseur de ces quan-

tités, ainsi je l'ôte de tous les termes de cette seconde quantité, & je prends à sa place $3aa + ba - 4b^2$. Je remarque ensuite qu'en multipliant la premiere quantité $4aa - 5ba + bb$ par 3 qui n'est point un diviseur de $3aa + ba - 4b^2$ la division sera possible; je fais donc cette division de $12aa - 15ab + 3bb$ par $3aa + ba - 4bb$, ce qui me donne 4 pour quotient & pour reste $- 19ab + 19bb$.

Il n'est donc plus question présentement que de trouver le plus grand commun diviseur de $3aa + ba - 4bb$, & de $- 19ab + 19bb$. Comme il faudroit, pour cette opération, diviser la premiere de ces deux quantités par la seconde, & que pour pouvoir diviser les deux premiers termes de ces quantités, il faudroit multiplier la premiere par $19b$ qui est un diviseur exact de la seconde, j'ôte ce diviseur de la seconde, ce qui la réduit à $- a + b$.

Mais le plus grand commun diviseur de $3aa + ba - 4bb$ & de $-a+b$, est $-a+b$ lui-même, puisque la division de ces deux quantités se fait exactement. Donc $- a + b$ est le plus grand commun diviseur de $3aa + ba - 4bb$ & de $- 19ab + 19bb$; Donc il est aussi le plus grand commun diviseur de $12aa - 15ab + 3bb$ & de $3aa + ba - 4bb$, donc il l'est encore de $4aa - 5ba + bb$, & de $3baa + bba - 4b^3$, aussi-bien que de $12a^3 - 12baa + 4bba - 4b^3$ & de $4aa - 5ba + bb$. Donc il est enfin le plus grand diviseur commun des quantités proposées $3a^3 - 3baa + bba - b^3$ & $4aa - 5ba + bb$.

LXXIII.

Il n'eſt pas difficile maintenant de voir qu'on réuſſiroit à peu près de la même maniere quelles que fuſſent les quantités dont on voulut trouver les plus grands communs diviſeurs. Le ſeul principe qu'on ſoit obligé d'ajouter dans cette recherche à la méthode de l'Article LXXI. c'eſt que deux quantités quelconques *A* & *B* conſerveront leur plus grand commun diviſeur, ſi on multiplie ou diviſe l'une de ces deux quantités, *A* par exemple, par une quantité qui n'ait aucun diviſeur commun avec *B*.

Méthode générale pour trouver le plus grand commun diviſeur des quantités algebriques.

On peut énoncer ainſi le procédé de la méthode générale de déterminer les plus grands communs diviſeurs. Soient *A* & *B* les deux quantités propoſées, on commencera par ordonner ces deux quantités par rapport à une des lettres quelconques qu'elles ont de commun. On verra enſuite par quelle quantité m il faudroit multiplier *A* pour que les termes affectés de la plus haute puiſſance de la lettre ſuivant laquelle on l'a ordonnée puiſſent ſe diviſer par les termes de *B* affectés de la plus haute puiſſance de la même lettre; ſi ce multiplicateur m n'a aucun commun diviſeur avec *B*, on s'en ſervira pour multiplier *A*, mais s'il a un commun diviſeur n on ôtera ce commun diviſeur tant de m que de *B*, & on ne multipliera *A* que par $\frac{m}{n}$, ce qui formera une nouvelle quantité *C* que l'on prendra à la place de *A*. On prendra de même à la place de *B* la quantité *D* qui en vient lorſqu'on l'a diviſé

par le diviſeur n qu'il a de commun avec m.

Cela fait, on diviſera C par D, & la diviſion faite, ſi elle eſt exacte, D ſera le plus grand commun diviſeur cherché de A & de B; mais s'il y a un reſte E, on fera à l'égard de D & de E la même opération qu'à l'égard de A & de B, & ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on arrive à deux quantités qui ſe diviſent exactement. Lorſqu'on y ſera parvenu, celle de ces deux quantités qui ſera contenue exactement dans l'autre, ſera le plus grand commun diviſeur cherché.

Il eſt bon de faire remarquer que ſi avant d'entreprendre l'opération dont on vient de voir la méthode, on apperçoit dans l'une des quantités propoſées A ou B quelque quantité qui en ſoit un diviſeur exact & qui ne le ſoit point de l'autre, il faudra commencer par ôter ce diviſeur pour que le calcul ſoit plus ſimple.

Afin que les Commençans puiſſent acquérir quelque facilité dans l'application de cette méthode, j'ai joint les exemples ſuivans.

L.XXIV.

Premier Exemple. Soient les quantités $qnp^3 + 3np^2q^2 - 2npq^3 - 2nq^4$ & $2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3$ dans leſquelles nous n'avons trouvé (art. LXIX.) le diviſeur commun $p - q$, que parce que nous ſçavions d'avance que la premiere de ces deux quantités diviſée par la ſeconde devoit donner le même quotient que la quantité $- nqp^2 - 4pq^2n - 2nq^3$ diviſée par $4mp^3 + 5mp^2q + 3mpq^2$.

Pour réduire présentement ces deux quantités, sans employer autre chose que la méthode précédente, on commencera par ôter qn qui est commun à tous les termes de la premiere de ces deux quantités, & qui n'est point contenu dans la seconde; on ôtera de même pm qui est commun à tous les termes de la seconde sans être contenu dans la premiere; & par-là l'opération sera réduite à trouver le plus grand diviseur commun des quantités (A) $-4p^3 - p^2q + 2pq^2 + 3q^3$ & (B) $p^3 + 3ppq - 2pq^2 - 2q^2$.

Divisant A par B, j'ai -4 pour quotient & pour reste (C) $11p^2q - 6pq^2 - 5q^3$, comme il faudroit alors multiplier B par $11q$ pour que son premier terme pût être divisé par le premier terme de C, & que q est contenu dans tous les termes de C, je multiplie simplement B par 11, & je divise C par q, d'où je n'ai plus à comparer que les deux quantités (D) $11p^3 + 33p^2q - 22pq^2 - 22q^3$, & ($E$) $11p^2 - 6pq - 5q^2$.

Je divise la premiere par la seconde, & j'ai pour quotient p & pour reste (F) $39p^2q - 17pq^2 - 22q^3$. Comme il faudroit alors multiplier(E)par $39q$ afin que son premier terme fut divisible par celui de cette nouvelle quantité F, & que q est commun à tous les termes de F, je ne multiplie donc E que par 39 & je divise son produit (G) $429p^2 - 234pq - 195q^2$ par (H)$39p^2 - 17pq - 22q^2$. Le quotient est 11 & le reste (I) $-47pq + 47q^2$.

Pour diviser alors H par I il faudroit mul-

tiplier tous ses termes par $47q$; mais cette quantité est un diviseur de H, je l'ôte donc de H & il me reste $q-p$ pour servir de diviseur à $39p^2-17pq-21q^2$. Or la division se fait exactement, donc $q-p$ est le plus grand diviseur commun cherché des quantités proposées.

LXXV.

Second exemple. Soient proposées présentement les deux quantités $ab+2aa-3bb-4bc-ac-cc$ & $9ac+2aa-5ab+4cc+8bc-12bb$, ordonnant ces deux quantités par rapport à a j'ai $2aa+ba-ca-3bb-4bc-cc$ & $2aa+9ca-5ba-12bb+8bc+4cc$, ou (A) $2aa+\overline{b-c}\times a-3bb-4bc-cc$ & (B) $2aa+\overline{9c-5b}\times a-12bb+8bc+4cc$.

Divisant la premiere par la seconde, j'ai 1 pour quotient & pour reste (C) $\overline{6b-10c}\times a+9bb-12bc-5cc$. Pour diviser B par cette quantité, je vois qu'il faudroit auparavant la multiplier par $3b-5c$. Mais avant d'en faire l'opération, je tente la division de C par $3b-5c$, elle réussit, & donne pour quotient (D) $2a+3b+c$; je n'ai donc plus qu'à chercher le plus grand commun diviseur de B & de D; mais B est divisible exactement par D, donc D ou $2a+3b+c$ est le plus grand commun diviseur cherché de $ab+2aa-3bb-4bc-ac-cc$ & de $9ac+2aa-5ab+4cc+8bc-12bb$. En effet la premiere de ces deux quantités est le produit de $2a+3b+c$ par $a-b-c$, la seconde le produit de

$2a + 3b + c$ par $a - 4b + 4c$, & ces deux quantités $a - b - c$ & $a - 4b + 4c$ n'ont plus aucun commun diviseur.

LXXVI.

Troisiéme Exemple.

Soient les deux quantités $(A)\ \overline{dd - cc} \times a^2 + c^4 - ddcc$ & $(B)\ 4da^2 - \overline{2cc + 4cd} \times a + 2c^3$ ordonnées par rapport à a. Je change d'abord B en $(C)\ 2da^2 - \overline{cc + 2cd} \times a + c^3$ en ôtant de tous ses termes le diviseur 2 qui n'est pas commun avec A. Je multiplie ensuite A par $2d$ afin de rendre la division possible, ce qui me donne pour quotient $dd - cc$ & pour reste $(D)\ \overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2cd} \times a - \overline{dd - cc} \times c^3 + 2dc^4 - 2d^3cc$, si on vouloit alors que cette quantité servit de diviseur à C, il faudroit multiplier auparavant C par $\overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2cd}$ afin que son premier terme permit la division.

Mais avant de faire cette multiplication, il faut sçavoir si $\overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2cd}$, ne seroit point ou un diviseur ou un multiple de quelque diviseur de D. Pour le sçavoir, je cherche le plus grand commun diviseur de $\overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2cd}$ & de $-\overline{dd - cc} \times c^3 + 2dc^4 - 2d^3cc$, c'est-à-dire de $ddcc - c^4 + 2cd^3 - 2c^3d$ & de $-ddc^3 + c^5 + 2dc^4 - 2d^3cc$; mais je vois tout de suite que la seconde de ces quantités n'est autre chose que le produit de la premiere par $-c$, & partant que la quantité D se réduit au produit de $\overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2dc}$ par $a - c$, donc au lieu de multiplier C par $\overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2dc}$, je divise

D par cette quantité & il vient (E) $a - c$ dont il faut chercher le plus grand commun diviſeur avec C; or $a - c$ diviſe exactement C, donc $a - c$ eſt le plus grand diviſeur cherché.

LXXVII.

Autre maniere de réſoudre le même exemple.

Au reſte avec un peu d'habitude dans le calcul, on découvre ſouvent le plus grand commun diviſeur de deux quantités plus facilement que par la méthode génerale qu'on vient d'expliquer. Par exemple les deux quantités précédentes $\overline{dd - cc} \times aa + c^4 - ddcc$ & $\overline{4daa - 2cc + 4cd} \times a + 2c^3$ étant ordonnées par rapport à d, & par conſequent étant ſous cette forme $\overline{aa - cc} \times dd + c^4 - aacc$ & $\overline{4ca - 4aa} \times d + 2c^3 - 2c^2 a$, il eſt aiſé de découvrir que $aa - cc$ eſt un diviſeur de la premiere, & $c - a$ un diviſeur de la ſeconde. Mais $aa - cc$ eſt diviſible par $c - a$, donc $c - a$ eſt un diviſeur des deux quantités propoſées, je les diviſe donc l'une & l'autre par $c - a$, & j'ai pour leurs quotients $\overline{cc - dd} \times \overline{c + a}$; & $4ad + 2cc$ qu'on voit aſſez facilement n'avoir plus de commun diviſeur, donc $c - a$ ou $a - c$ étoit le plus grand commun diviſeur des quantités propoſées.

LXXVIII.

Autres quantités dont on trouve le plus grand commun diviſeur ſans la

Qu'on ſe propoſe maintenant de chercher le plus grand commun diviſeur des deux quantités $6a^5 + 15a^4 b - 4a\,cc - 10aabcc$ & $9a^3 b - 27aabc - 6abcc + 18bc^3$,

je commence par ôter aa de tous les termes de la premiere; & $3b$ de tous ceux de la seconde. J'ai alors $6a^3 + 15a^2b - 4acc - 10bcc$ & $3a^3 - 9aac - 2acc + 6c^3$; mais comme la seconde de ces deux quantités ne contient aucun b, je conclus que si elle a un commun diviseur avec la premiere, il faut qu'elle l'ait séparement avec ses deux parties $6a^3 - 4acc$ & $15a^2b - 10bcc$, & que ces deux parties doivent aussi avoir entr'elles le même commun diviseur. Or on voit tout de suite que $3aa - 2cc$ est le diviseur commun de ces deux parties, donc il est le plus grand commun diviseur des quantités proposées si elles en ont un. Le prenant donc pour diviser ces deux quantités on voit qu'en effet il les divise & qu'il est par consequent leur plus grand commun diviseur. méthode précédente.

LXXIX.

On a vû suffisamment par ce qui précede que pour trouver les deux inconnues que renferme un Problême, il faut avoir deux Equations, il n'est pas difficile d'imaginer en partant de-là que lorsqu'il y aura trois inconnues dans un Problême, il faudra trois Equations & ainsi de suite. Quant à la maniere de dégager les inconnues de ces Equations, elle ne sera pas difficile non plus à imaginer après ce qu'on en a vû pour celles qui ne renferment que deux inconnues. Car qu'on ait trois Equations contenant chacune les trois inconnues x, y, z; si on tire la valeur de x de chacune de ces Equa- Lorsqu'il y a trois inconnues dans un Problême, il faut trois Equations pour le résoudre. Comment on dégage les inconnues de ces Equations.

tions exprimée par le moyen des connues & des deux autres inconnues y, z, de ces Equations, il eſt évident qu'en égalant les unes aux autres ces différentes valeurs de x, on aura deux nouvelles Equations qui ne contiendront plus que les deux inconnues y & z, & qui ſeront par conſequent dans le cas de celles dont nous venons de parler. Il en ſeroit de même des Equations à quatre, cinq &c. inconnues.

Comme la méthode générale qu'on vient d'expliquer peut renfermer des difficultés dans l'exécution, nous allons en montrer l'application dans le Problême ſuivant qui renfermera la plus grande complication que peuvent avoir les Equations du premier dégré à trois inconnues.

LXXX.

Problême dans lequel on employe trois inconnues.

On ſçait ce que trois magaſins contenant chacun trois ſortes de denrées, on couté les uns & les autres ſéparement; on ſçait de plus le nombre de meſures que chaque magaſin contient de ces trois différentes denrées; on demande à combien revient une meſure de chaque denrée.

Soient a, b, c, les nombres de meſures de chaque denrée contenue dans le premier magaſin, & ſoit d le prix de ce magaſin.

Soient de plus e, f, g, les meſures des mêmes denrées contenues dans le ſecond magaſin dont le prix eſt ſuppoſé h.

Soient encore i, k, l les meſures des mêmes denrées contenues dans le troiſiéme magaſin dont le prix eſt ſuppoſé m.

Soient enfin x, y, z ce que coute une mesure de chaque denrée.

Il eſt évident que la quantité de la premiere denrée contenue dans le magaſin d coutera ax, puiſque a eſt le nombre des meſures de cette denrée & x le prix de la meſure de cette denrée. De même la quantité de la ſeconde denrée contenue dans le même magaſin coutera by, & la quantité de la troiſiéme denrée contenue dans le même magaſin coutera cz. Ajoutant donc ces trois ſommes pour les égaler au prix d de ce magaſin, on aura l'Equation

$$ax + by + cz = d,$$

on formera de même les Equations,

$ex + fy + gz = h$, $ix + ky + lz = m$. en exprimant les conditions mentionnées pour les deux autres magaſins.

Il eſt queſtion maintenant de tirer de ces Equations les valeurs de x, y, z. Dans cette vûe on tirera d'abord la valeur de x de la premiere Equation qui ſera $\frac{d - by - cz}{a}$, & égalant cette valeur de x à celle qu'on tire de la ſeconde Equation, on aura l'Equation

$$\frac{d - by - cz}{a} = \frac{h - fy - gz}{e}.$$

Egalant enſuite la même valeur $\frac{d - by - cz}{a}$ à celle qu'on tire de la troiſiéme Equation, on aura l'Equation $\frac{d - by - cz}{a} = \frac{m - ky - lz}{i}$.

De la premiere de ces deux Equations entre y & z, on tirera $de - bey - cez = ah - afy - agz$ ou $z = \frac{de - ah + afy - bey}{ce - ag}$

De la seconde on tirera $di - biy - icz = am - aky - alz$

ou $z = \frac{di - am + aky - biy}{ci - al}$

En égalant ces deux valeurs de z il est clair qu'on auroit une Equation où il n'entreroit plus d'autre inconnue que y, & qu'en résolvant cette Equation on connoîtroit y. Comme les calculs que l'on auroit par cette opération seroient assez considérables ; je vais faire voir la maniere de les éviter en employant quelques abbreviations que les premiers Analystes qui ont eu de grands calculs à faire ont aisément imaginées.

LXXXI.

Ces abbreviations consistent à mettre de nouvelles lettres à la place de plusieurs termes composés de connues.

Maniere d'abreger les Calculs par des dénominations particulieres.

Au lieu de... $de - ah$ je mettrai ...... α

Au lieu de... $af - be$ .... β

Au lieu de... $ce - ag$ .... γ

Au lieu de... $di - am$ .... δ

Au lieu de... $ak - bi$ .... ε

Au lieu de... $ci - al$ .... φ

Par ces nouvelles dénominations les Equa-

tions précédentes deviendront $z = \frac{\alpha + \beta y}{\gamma}$ & $z = \frac{\delta + \epsilon y}{\varphi}$ lesquelles donneront $\alpha\varphi + \beta\varphi y = \delta\gamma + \gamma\epsilon y$ d'où l'on tire .... $y = \frac{\alpha\varphi - \delta\gamma}{\gamma\epsilon - \beta\varphi}$ substituant ensuite cette valeur de y dans l'une des deux valeurs précédentes de z, dans la premiere par exemple, on aura

$$z = \frac{\alpha + \frac{\beta\alpha\varphi - \beta\gamma\delta}{\gamma\epsilon - \beta\varphi}}{\gamma}$$

qui se réduit à $z = \frac{\alpha\epsilon - \beta\delta}{\gamma\epsilon - \beta\varphi}$

Cela fait, on mettra ces valeurs de y & de z dans l'une des valeurs précédentes de x, dans $\frac{d - cz - by}{a}$ par exemple, & l'on aura

$$x = \frac{d}{a} - \frac{c}{a} \times \frac{\overline{\alpha\epsilon - \beta\delta}}{\gamma\epsilon - \beta\varphi} - \frac{b}{a} \times \frac{\overline{\alpha\varphi - \delta\gamma}}{\gamma\epsilon - \beta\varphi}$$

ou $x = \frac{d \times \overline{\gamma\epsilon - \beta\varphi} - c \times \overline{\alpha\epsilon - \beta\delta} - b \times \overline{\alpha\varphi - \delta\gamma}}{a \times \overline{\gamma\epsilon - \beta\varphi}}$

LXXXII.

Pour montrer présentement l'application de cette méthode, supposons que le premier magasin contienne 30 mesures de seigle, 20 d'orge & 10 de froment, & qu'il ait couté 230 ₶. *Exemple du Probléme précédent en nombres.*

Que le second magasin contienne 15 mesures de seigle, 6 d'orge & 12 de froment & qu'il ait couté 138 ₶,

Que le troisiéme magasin contienne 10 mesures de seigle, 5 d'orge, 4 de froment & qu'il ait couté 75 ₶. Pour sçavoir à combien revient la mesure de seigle, celle d'orge & celle de froment, il faudra faire

$a = 30$, $b = 20$, $c = 10$, $d = 230$
$e = 15$, $f = 6$, $g = 12$, $h = 138$,
$i = 10$, $k = 5$, $l = 4$, $m = 75$, ce qui donnera $de - ah = \alpha = -690$, $af - be = \beta = -120$
$ce - ag = \gamma = -210$, $di - am = \delta = 50$
$ak - bi = \varepsilon = -50$, $ci - al = \varphi = -20$
substituant ensuite ces valeurs dans les quantités
$\alpha\varphi - \gamma\delta$, $\gamma\varepsilon - \beta\varphi$, $\alpha\varepsilon - \beta\delta$ on aura
24300, 8100, 40500 pour ces trois quantités, ce qui donnera par consequent

$$y = \frac{24300}{8100} = 3, \quad z = \frac{40500}{8100} = 5$$

$$\& \ x = \frac{230 \times 8100 - 10 \times 40500 - 20 \times 24300}{30 \times 8100} = 4$$

Ainsi le prix de la mesure de seigle est de 4 ₶.
Celui de la mesure d'orge de . . . . 3 ₶.
Et celui de la mesure de froment de . . . 5 ₶.

LXXXIII.

Tous les Problêmes du premier dégré à trois inconnues, peuvent, étant mis en Equations, être compris dans le Problême précédent.

Comme les Equations du Problême précédent sont les plus génerales du premier dégré à trois inconnues, puisque chacune contient les trois inconnues combinées avec des connues quelconques, il s'ensuit que tout Problême du premier dégré à trois inconnues sera renfermé dans le précédent aussi-tôt qu'il sera exprimé analytiquement. Pour en donner un exemple soit proposé le Problême suivant. On

On a trois lingots composés de différens métaux fondus ensemble,

La livre du premier contient ....

	onces		onces		onces	
....	7	d'arg.	3	de cuiv.	6	d'étain,
celle du 2[d]	12		3		1,	
celle du 3[eme]	4		7		5.	

On demande ce qu'il faut prendre de chacun de ces lingots pour en former un quatriéme qui contienne

8 onces d'arg. 3 onces 6 gros cuiv. 4 onces 2 gros étain

Soient x, y, z les nombres d'onces qu'il faut prendre de chacun de ces métaux.

Il est évident que $\frac{7}{16}x$ sera ce qu'il y aura d'argent dans ce qu'on tirera du premier lingot

que $\frac{12}{16}y$ sera ce qu'il y en aura dans le morceau tiré du second lingot

& que $\frac{4}{16}z$ sera ce qu'il y en aura dans le morceau tiré du troisiéme.

Ajoutant donc ces trois quantités leur somme devra être 8 onces d'argent, donc on a l'Equation $\frac{7}{16}x + \frac{12}{16}y + \frac{4}{16}z = 8$ ou $7x + 12y + 4z = 128$.

On aura de même pour ce qu'on tirera de cuivre des trois métaux, $\frac{3}{16}x$, $\frac{3}{16}y$ & $\frac{7}{16}z$ dont la somme doit faire 3 onces 6 gros ou $\frac{15}{4}$ onces ce qui donnera $\frac{3}{16}x + \frac{3}{16}y + \frac{7}{16}z = \frac{15}{4}$. ou $3x + 3y + 7z = 60$.

Ce qu'on tirera d'étain des trois métaux sera pareillement $\frac{6}{16}x$, $\frac{1}{16}y$, $\frac{5}{16}z$ dont la somme doit faire 4 onces 2 gros ou $4\frac{1}{4}$ onces donc

$\frac{6}{16}x + \frac{1}{16}y + \frac{5}{16}z = 4 + \frac{1}{4}$
ou $6x + y + 5z = 68$.

Il ne s'agit donc plus que de résoudre ces trois Equations, c'est ce que l'on tirera facilement de la solution précédente en faisant

$a = 7 \quad b = 12 \quad c = 4 \quad d = 128,$
$e = 3 \quad f = 3 \quad g = 7 \quad h = 60,$
$i = 6 \quad k = 1 \quad l = 5 \quad m = 68,$

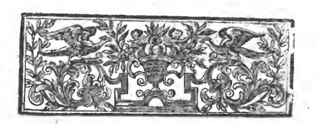
par lesquelles on trouvera
$de - ha = \alpha = -36$; $af - be = \beta = -15$; $ce - ag = \gamma = -37$,
$di - am = \delta = 292$, $ak - bi = \varepsilon = -65$;
$ci - al = \varphi = -11$,

substituant ensuite ces valeurs dans les quantités $\alpha\varphi - \gamma\delta$, $\gamma\varepsilon - \beta\varphi$, $\alpha\varepsilon - \beta\delta$ on aura 11200, 2240, 6720 pour ces trois quantités, ce qui donnera par conséquent

$y = \frac{11200}{2240} = 5$, $z = \frac{6720}{2240} = 3$ &

$x = \frac{128 \times 2240 - 4 \times 6720 - 12 \times 11200}{7 \times 2240} = 8$,

c'est-à-dire qu'il faut prendre 5 onces du premier lingot, 3 onces du second & 8 du troisiéme, pour former le lingot demandé.



ELEMENS D'ALGEBRE.

SECONDE PARTIE.

De la résolution des Equations du second dégré.

NOUS avons présentement assez traité des Problêmes du premier dégré pour passer à ceux des autres dégrés, & particulierement aux Problêmes du second dégré que nous allons examiner dans cette seconde Partie. Quant à la maniere d'exprimer analytiquement leurs conditions, elle est la même que dans les Problêmes du premier dégré, ce n'est que pour résoudre les Equations ausquelles on arrive en exprimant les Problêmes qu'il faut employer des méthodes différentes suivant les dégrés de ces Equations. On en peut voir un exemple dans le Problême suivant, qui dans sa généralité renferme des Problêmes de tous les dégrés, & n'est pas plus

difficile à exprimer analytiquement pour le dégré le plus composé, que pour le plus ſimple.

I

Problème qui contient dans ſa généralité des Problèmes de tous les dégrés.

Un homme ayant placé une ſomme a *dans un commerce où il perd, veut ſe retirer dès la premiere année; mais en ayant manqué l'occaſion & ne l'ayant pû retrouver qu'à la deuxiéme ou à la troiſiéme, ou en général à la* n^{eme} *année, il trouve que la ſomme eſt diminuée de la quantité* b *de ce qu'elle étoit après la premiere année. On demande à combien pour cent montoit ſa perte par an.*

Soit x le nombre cherché, c'eſt-à-dire ce que chaque cent livres perd après la premiere année. En faiſant cette proportion $100 : \overline{100 - x} = a : a \times \frac{\overline{100 - x}}{100}$, le quatriéme terme $a \times \frac{\overline{100 - x}}{100}$ ou $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}$ exprimera ce que devient la ſomme a après la premiere année.

Si on continue enſuite cette proportion en diſant

$$100 : 100 - x = \frac{a \times \overline{100 - x}}{100} : \frac{a \times \overline{100 - x}^2}{10000} :$$

le quatriéme terme $\frac{a \times \overline{100 - x}^2}{10000}$ ou $a \times \overline{1 - \frac{x}{100}}^2$ ſera ce que devient la même ſomme a après la ſeconde année.

On exprimera de même ce que cette ſomme devient après la troiſiéme année par

$a \times \overline{1-\frac{x}{100}}^{3}$, & en général ce qu'elle devient après la n^eme année sera $a \times \overline{1-\frac{x}{100}}^{n}$, c'est-à-dire a multiplié par la quantité $1-\frac{x}{100}$ élevée à la puissance n.

II.

Présentement si on veut sçavoir quelle sera l'Equation à résoudre, en supposant que le négociant se soit retiré à la seconde année, il faudra égaler la quantité $a \times \overline{1-\frac{x}{100}}^{2}$ à la quantité $a \times \overline{1-\frac{x}{100}}$ diminuée de la quantité b, ce qui donnera $a \times \overline{1-\frac{x}{100}}^{2} = a \times \overline{1-\frac{x}{100}} - b$, ou en multipliant $1-\frac{x}{100}$ par lui-même, ainsi que l'indique l'Exposant 2, $a \times \overline{1-\frac{2x}{100}+\frac{xx}{10000}} = a \times \overline{1-\frac{x}{100}} - b$ qui se réduit à $x - 100x = -10000\frac{b}{a}$ Equation du second dégré à laquelle les méthodes précédentes ne sçauroient atteindre.

Equation du Problêm précédent pour le cas du second dégré.

III.

Si on suppose que ce ne soit qu'à la troisiéme année, l'Equation à résoudre sera $a \times \overline{1-\frac{x}{100}}^{3} = a \times \overline{1-\frac{x}{100}} - b$ qui, en multipliant $1-\frac{x}{100}$ deux fois par lui-même, ainsi

que l'indique l'Expoſant 3, devient

Pour le troiſiéme dégré.

$$a\times\overline{1-\frac{3x}{100}+\frac{3x^2}{10000}-\frac{x^3}{1000000}}=a\times\overline{1-\frac{x}{100}}-b$$

ou enfin

$$x^3-300x^2+20000x=-1000000\frac{b}{a}$$

Equation qui doit naturellement promettre plus de difficulté que la précédente.

IV.

Quant aux autres cas on voit aiſément comment on parviendroit ſucceſſivement à former les Equations qu'ils donneroient, l'induction montre que l'Equation ſeroit toujours du dégré exprimé par le nombre n; ſi on veut avoir cette Equation en général ſans ſpécifier le nombre n; on n'aura qu'à employer l'expreſſion générale $a\times\overline{1-\frac{x}{100}}^{\,n}$ de la quantité que devient a après la n[eme] année & l'Equation ſera

Pour le dégré n.

$$a\times\overline{1-\frac{x}{100}}^{\,n}=a\times\overline{1-\frac{x}{100}}-b \text{ ou } \ldots$$

$$\overline{1-\frac{x}{100}}^{\,n}=1-\frac{x}{100}-\frac{b}{a}.$$

V.

Contentons nous préſentement de réſoudre le Problême dans le cas où ſon Equation eſt du ſecond dégré, c'eſt-à-dire lorſqu'elle eſt $x^2-100x=-10000\frac{b}{a}$, ou plûtôt cherchons une méthode pour réſoudre généralement toutes les Equations du ſecond dégré. Ceux qui voudront réſoudre des cas plus élevés du même Problême, y parviendront facile-

Maniere d'arriver à la ſolution générale des Equations du ſecond dégré.

ment aussi-tôt qu'ils auront vû dans la suite, les méthodes générales qui conviennent aux dégrés que ces Equations donnent.

Ce qui se présente le plus naturellement en cherchant une méthode pour résoudre généralement les Equations du second dégré, c'est de voir la liaison qu'il peut y avoir entre ces Equations & celles du premier.; or il est clair que toute Equation du premier dégré deviendra du second, si on en quarre les deux membres, par exemple $x + a = b$ donne étant quarrée $x^2 + 2ax + a^2 = b^2$; reste donc à sçavoir si, par une opération contraire, on pourroit rappeller toute Equation du second dégré à une du premier. Prenons, par exemple l'Equation $x^2 + px = q$ qui exprimera toute Equation du second dégré selon les valeurs qu'auront p & q, ces lettres pouvant désigner toutes sortes de quantités positives ou négatives. Suivant ce que nous venons de dire il n'y a qu'à voir si $x^2 + px$ ne seroit pas le quarré de quelque quantité dont la premiere partie seroit x, & dont la seconde seroit une connue, afin de trouver par ce moyen l'Equation du premier dégré, qui, étant quarrée seroit devenue $x^2 + px = q$. Or on voit facilement que $x^2 + px$ n'est pas un quarré, mais on voit en même-tems qu'il peut le devenir par quelque addition, & l'on a, comme on sçait, la liberté de faire cette addition, pourvû qu'on ajoute la même quantité de l'autre côté de l'Equation.

Afin de trouver ce qui manque à $x^2 + px$ pour en faire un quarré, il n'y a autre chose

à faire qu'à comparer cette quantité avec le quarré $xx + 2ax + aa$; le terme px répondant à $2ax$; p répondra à $2a$ & partant a à $\frac{1}{2}p$; or comme a^2 est ce qui manque à $x^2 + 2ax$ pour en faire un quarré, le quarré de $\frac{1}{2}p$, c'est-à-dire $\frac{1}{4}p^2$ sera ce qui manque à $xx + px$ pour en faire un quarré, c'est-à-dire que $xx + px + \frac{1}{4}p^2$ sera un quarré; il l'est en effet & c'est celui de $x + \frac{1}{2}p$. Ayant donc ajouté $\frac{1}{4}pp$ au premier membre de l'Equation, il faut en ajouter autant de l'autre côté, & l'Equation sera $xx + px + \frac{1}{4}pp = q + \frac{1}{4}pp$. Or la quantité $x + \frac{1}{2}p$ multipliée par elle-même donne $xx + px + \frac{1}{4}pp$; il faut donc que cette quantité soit aussi égale au nombre qui, multiplié par lui-même, donnera $q + \frac{1}{4}pp$. Pour exprimer ce nombre, ou plûtôt cette quantité en général on écrit $\sqrt{q + \frac{1}{4}pp}$.

Le signe $\sqrt{}$ indique la racine quarrée.

Employant le signe $\sqrt{}$, qu'on appelle signe radical, pour faire * ressouvenir qu'il faut prendre la racine quarrée de la quantité qui le suit, laquelle doit être toujours, pour éviter la confusion, surmontée d'une barre ou renfermée entre des parenthèses.

On a donc en employant cette dénomination $x + \frac{1}{2}p = \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$, d'où l'on tire $x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$ valeur de x dans l'Equation proposée $xx + px = q$, &

* Le nombre qui multiplié par lui-même en a formé un autre est dit sa racine quarrée, ou simplement sa racine ; cette définition connue en arithmetique est aussi admise en Algebre pour toutes sortes de quantités.

cette valeur servira pour toute Equation donnée aussi-tôt qu'en comparant cette Equation avec $xx + px = q$, on en aura déduit les valeurs particulieres de p & de q.

VI.

Si on se souvient presentement que l'on a trouvé (I. Part. art. LX.) qu'en multipliant une quantité négative par une quantité négative, il en vient aussi-bien une quantité positive, que si on avoit multiplié deux quantités positives l'une par l'autre, on verra que la racine d'une quantité positive pourra toujours être affectée du signe que l'on voudra ; ainsi au lieu de l'Equation $x + \frac{1}{2}p = + \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$ on peut écrire $x + \frac{1}{2}p = - \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$, ce qui donneroit alors $x = -\frac{1}{2}p - \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$; d'où l'on tire ce principe général qu'une Equation quelconque du second degré a toujours deux racines. On entend alors par racine d'une Equation la valeur de l'inconnue dans cette Equation. Il faut bien prendre garde de confondre cette expression avec celle de la racine quarrée.

La racine quarrée d'une quantité est aussi-bien négative que positive.

Une Equation du second dégré a deux racines, c'est-à-dire deux valeurs d'x.

VII.

Pour renfermer dans une seule & même expression les deux racines ou valeurs de x dans l'Equation précédente $xx + px = q$, on se sert du signe $\pm$, & l'on écrit ainsi ces deux valeurs $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$.

Formule contenant ces deux racines.

VIII.

Appliquons maintenant cette solution géné-

Application de la formule précédente à l'Equation de l'Art. II. rale à l'Equation $xx - 100x = -10000\frac{b}{a}$ à laquelle nous étions arrivés dans le problême précédent. En comparant cette Equation avec $x^2 + px = q$, nous aurons $p = -100$; $q = -10000\frac{b}{a}$, & faisant les substitutions de ces valeurs à la place de p & de q dans la formule générale $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$, il viendra $x = 50 \pm \sqrt{2500 - 10000\frac{b}{a}}$.

IX.

Réduction de la valeur d'x en formant la racine du produit par celles des produisans.

On peut donner une forme un peu plus simple à la partie radicale $\sqrt{2500 - 10000\frac{b}{a}}$ de cette valeur de x en partant de ce principe que la racine quarrée du produit de deux ou de plusieurs quantités est le produit des racines quarrées de ces quantités ; car décomposant alors $2500 - 10000\frac{b}{a}$ en ses deux produisans 2500 & $1 - \frac{4b}{a}$, & prenant les racines de ces deux quantités, on aura 50 & $\sqrt{1 - \frac{4b}{a}}$, dont le produit $50\sqrt{1 - \frac{4b}{a}}$, sera la valeur de $\sqrt{2500 - 10000\frac{b}{a}}$, c'est-à-dire que la valeur de x sera $50 \pm 50\sqrt{1 - \frac{4b}{a}}$.

Quant à la démonstration de ce principe que la racine d'un produit quelconque, se trouve en multipliant les racines de ses produisans, elle est bien facile à imaginer, lorsqu'on se rappelle l'inverse de ce principe, c'est-à-dire, que pour

quarrer un produit, comme $a b$, on multiplie l'un par l'autre, les quarrés $a a$ & $b b$ de ses produisans a & b.

X.

Pour faire usage de cette valeur de x, il n'est plus besoin que de sçavoir quel est le rapport qu'on veut qu'il y ait entre b & a. Supposons, par exemple, que b soit la partie $\frac{6}{25}$ de a, c'est-à-dire, que le négociant ait trouvé à la seconde année la somme diminuée de ce qu'elle étoit après la premiere d'une quantité égale au $\frac{6}{25}$ du total, on aura par cette supposition $\frac{4b}{a} = \frac{24}{25}$ & $1 - \frac{4b}{25} = \frac{1}{25}$, d'où la racine $\sqrt{1 - \frac{4b}{25}}$ sera $\frac{1}{5}$ & donnera par conséquent $x = 50 \pm 50 \times \frac{1}{5}$ qui exprime à la fois 60 & 40. Exemple de ce Problême.

Or ces deux valeurs de x resolvent en effet également l'Equation $xx - 100x = - 2400$ dans laquelle l'Equation générale $xx - 100x = - 10000\frac{b}{a}$ se change par la supposition de $\frac{b}{a} = \frac{6}{25}$: Car $xx - 100x$ devient également $- 2400$, soit qu'on fasse $x = 60$; soit qu'on fasse $x = 40$.

On peut encore d'une maniere plus convainquante reconnoître la nécessité des deux solutions 60 & 40. Car qu'on suppose d'abord $x = 60$, c'est-à-dire que la somme de 100000 ℔ par exemple, perde 60 pour cent par an, il est évident qu'après la premiere année elle sera réduite à 40000 ℔.

A la seconde année elle sera de 16000 ℔ en perdant encore 60 pour cent; or 16000 ℔ sont plus petits que 40000 ℔ de 24000 ℔ qui sont les $\frac{6}{25}$ de 100000.

Qu'on suppose à present que la même somme de 100000 ℔ perde 40 pour cent par an, après la 1ere année elle sera réduite à 60000 ℔ & après la 2de à 36000 ℔ or 36000 ℔ sont encore plus petits que la somme 60000 ℔ de la quantité de 24000 ℔ ou des $\frac{6}{25}$ de 100000 ℔

XI.

Autre exemple.

Si on veut que b soit les $\frac{4}{25}$ de a, on aura $x = 50 \pm 50\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = 50 \pm 50\sqrt{\frac{9}{25}} = 50 \pm 30$, c'est-à-dire ou 80 ou 20 qu'on trouvera encore résoudre également le Problême.

XII.

Troisiéme exemple qui demandant la racine d'une quantité négative est impossible.

Mais si l'on suppose $\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$, on trouvera $x = 50 \pm 50\sqrt{1 - \frac{4}{3}}$, ou $50 \pm 50\sqrt{-\frac{1}{3}}$. Or comme on ne sçauroit trouver aucune quantité qui étant multipliée par elle-même donne —, il s'ensuit que la quantité $\sqrt{-\frac{1}{3}}$ ne sçauroit être réelle, ou ce qui revient au même, que le Problême est impossible dans ce cas.

Ainsi on peut être assuré qu'il n'y a aucune valeur possible à substituer pour x dans l'Equation $xx - 100x = -\frac{10000}{3}$ qui fasse que les deux membres en deviennent égaux; ou ce qui revient au même, que la somme a ne sçauroit être alterée chaque année suivant aucune pro-

portion donnée qui soit telle que de la seconde à la troisiéme année la diminution soit d'une quantité égale au tiers du total. Les Geometres regardent cependant comme une espece de solution ou de racine de l'Equation $xx - 100x = -\frac{10000}{3}$, la valeur $50 + 50\sqrt{-\frac{1}{3}}$ qu'ils trouvent alors, mais ils l'appellent une racine imaginaire, & cette racine imaginaire à cause du signe $\pm$ est toujours censée une double solution.

Ces racines sont dites imaginaires.

XIII.

On voit par la valeur génerale $-\frac{1}{2}p + \sqrt{q + \frac{1}{4}pp}$ de x, que toutes les fois que la quantité désignée par q, sera négative & plus grande que $\frac{1}{4}pp$, les deux racines de l'Equation $xx + px = q$, seront toutes deux imaginaires.

Quelles sont les Equations du second dégré, dont les racines sont imaginaires.

XIV.

Lorsqu'on a une Equation quelconque du second degré, on peut la résoudre sans la comparer terme à terme avec l'Equation générale $xx + px = q$; car on peut, sans augmenter le calcul, répéter le même procedé qu'on a suivi en resolvant cette Equation générale. Il ne faut pour cela qu'ajouter aux deux membres le quarré de la moitié de ce qui multiplie x dans le second terme du premier membre, & prendre ensuite la racine quarrée des deux membres. Qu'on ait, par exemple, à résoudre l'Equation $xx + 8x = 9$, en ajoutant des deux côtés 16,

Résolution des Equations du second dégré sans les comparer à la formule générale.

quarré de la moitié de 8, on a $xx + 8x + 16 = 9 + 16 = 25$. Et prenant ensuite la racine des deux côtés, on a $x + 4 = \pm 5$, c'est-à-dire $x = -4 \pm 5$ ou $x = -9$ & $x = 1$, & ces deux valeurs resolvent également l'Equation $xx + 8x = 9$.

XV.

Pour accoutumer les Commençans aux difficultés qu'on rencontre dans les Problêmes du second degré, nous leur proposerons encore le Problême suivant.

Autre Problême du second degré.

Trouver sur la ligne qui joint deux lumieres quelconques le point où ces deux lumieres éclairent également, en supposant ce principe de physique, que l'effet d'une lumiere est quatre fois plus grand lorsqu'elle est deux fois plus proche, neuf fois plus grand lorsqu'elle est trois fois plus proche, ou pour s'exprimer comme les Géometres, que son effet est en raison renversée du quarré de la distance.

Que a exprime la distance qui est entre les lumieres données, & que le rapport de m à n soit celui qui est entre l'effet de la plus petite lumiere à une certaine distance & l'effet de la plus grande lumiere à la même distance.

De plus, que x exprime la distance de la plus petite des deux lumieres à un point pris à volonté sur la ligne qui joint les deux lumieres, il est clair que $a - x$ sera la distance du même point à l'autre lumiere, que les quarrés de ces deux distances seront x^2 & $x^2 - 2ax + a^2$, & par conséquent que les quantités qui seront en

raison renversée de ces quarrés seront entr'elles comme $\frac{1}{xx}$ * & $\frac{1}{xx - 2ax + aa}$.

De là il suit que si les lumieres étoient égales, les effets qu'elles produiroient chacune dans ce même point, seroient entr'elles comme $\frac{1}{xx}$ à $\frac{1}{xx - 2ax + aa}$, mais ces lumieres ayant des quantités absolues qui sont entr'elles dans la raison de m à n, leurs effets doivent donc être entr'eux comme $\frac{m}{xx}$ à $\frac{n}{xx - 2ax + aa}$.

Présentement pour que le point pris à volonté devienne le point demandé, il n'y a autre chose à faire qu'à égaler ces deux quantités, ce qui donnera l'Equation $maa - 2amx + mxx = nxx$, qu'on résoudra ainsi.

On commencera par passer les termes mxx & $2amx$ dans l'autre membre, ce qui donnera $\overline{n - m} \times xx + 2amx = maa$ où $xx + \frac{2am}{n - m} x = \frac{aam}{n - m}$.

On ajoutera ensuite aux deux membres de cette Equation le quarré de la moitié du coefficient du second terme, & l'on aura

* Ceci doit être facile à entendre à ceux qui auront vû dans l'Arithmétique ce que c'est que des raisons renversées. Il n'y a pas plus de difficulté à voir que $\frac{1}{xx}$ & $\frac{1}{xx - 2ax + aa}$ sont en raison renversée de xx & de $xx - 2ax \; aa$, qu'à voir que $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ sont en raison renversée de 3 & 4.

$$x^2 + \frac{2amx}{n-m} + \frac{aamm}{\overline{n-m}} = \frac{aam}{n-m} + \frac{aamm}{\overline{n-m}^2}$$

dont le second membre devient $\frac{aamn}{\overline{n-m}^2}$ en mettant les deux termes $\frac{aam}{n-m} + \frac{aamm}{\overline{n-m}^2}$ au même dénominateur & en réduisant.

Cela fait, on prendra la racine des deux membres de l'Equation, & l'on aura $x + \frac{am}{n-m}$ $= \pm \sqrt{\frac{aamn}{\overline{n-m}^2}}$ ou $x = -\frac{am}{a-m} \pm \frac{a}{n-m}\sqrt{mn}$, en prenant la racine de la partie $\frac{aa}{\overline{n-m}^2}$ qui est un quarré parfait, & laissant sous le signe radical son multiplicateur mn, qui n'est pas un quarré du moins dans toutes les valeurs de m & de n. Donc les deux valeurs d'x qui résolvent l'Equation précédente, & par consequent le Problême qui a conduit à cette Equation sont exprimées par la formule

$$x = -\frac{am}{n-m} \pm \frac{a}{n-m}\sqrt{mn} \text{ ou } x$$
$$= \frac{a}{n-m} \times \overline{-n \pm \sqrt{mn}}.$$

XVI.

Des deux valeurs précédentes, l'une est nécessai-

On voit par cette expression que l'une des valeurs est nécessairement négative & l'autre positive. Car 1°. si on prend le signe — pour la

la quantité radicale $\sqrt{mn}$, il n'est pas douteux que la quantité totale ne soit négative. 2°. Si on fait $\sqrt{mn}$ positive, $-m+\sqrt{mn}$ qu'on a alors sera positif, parce que ayant fait par la supposition n plus grand que m, $\sqrt{mn}$ doit être plus grand que m.

rement positive, l'autre négative.

XVII.

Si on cherche présentement l'usage qu'on doit faire de la valeur négative, on trouvera, en se rappellant ce qu'on a vû (I. Part. Art. LXIII.) sur ces valeurs dans les Equations du premier dégré, qu'elle doit être prise dans un sens opposé à la premiere, c'est-à-dire que le point qu'elle donne pour résoudre ce Problême, au lieu d'être placé entre les deux lumieres, sera placé sur le prolongement de la ligne qui les joint du côté de la lumiere la plus foible.

Usage de la valeur négative.

On n'aura aucune difficulté à admettre cette position de la valeur négative de x, lorsqu'on remarquera que cette même valeur n'a été trouvée négative, que parce qu'on a résolu le Problême, en regardant le point cherché comme placé entre les deux lumieres, car si on avoit fait attention à la possibilité de prendre ce point sur le prolongement de la ligne qui les joint, on auroit eu un autre calcul rélatif à cette position, & l'x qui auroit été alors placé naturellement sur le prolongement de la ligne qui joint les lumieres, auroit été positif.

XVIII.

Pour nous faire mieux entendre, nous allons reprendre le Problême en entier, en supposant le point cherché sur le prolongement de la ligne

qui joint les lumieres. La diſtance de ce point à la plus petite lumiere étant toujours nommée x, ſa diſtance à la plus grande lumiere ſera alors $a+x$, les quarrés de ces diſtances xx & $aa+2ax+xx$; les deux quantités de lumiere $\frac{m}{xx}$ & $\frac{n}{aa+2xa+xx}$, leſquelles étant égales par les conditions du Problême donneront $\frac{m}{xx}=\frac{n}{aa+2ax+xx}$ ou $maa+2amx+mxx=nxx$ ou $\overline{n-m}\times xx-2amx=maa$ ou $xx-\frac{2amx}{n-m}=\frac{m}{n-m}aa$ qui étant réſolu donnera

$x=\frac{a\times\overline{m\pm\sqrt{mn}}}{n-m}$ dont la premiere valeur

$\frac{a\times\overline{m+\sqrt{mn}}}{n-m}$ ſera poſitive, & la ſeule qui réſoudra exactement le Problême dans le ſens où il eſt propoſé alors.

Quant à la ſeconde valeur $\frac{a\times\overline{m-\sqrt{mn}}}{n-m}$ qui eſt négative, elle doit être alors priſe dans un ſens oppoſé à la premiere, c'eſt-à-dire que le point qu'elle donne doit être placé, non comme on l'a ſuppoſé dans ce calcul, ſur le prolongement de la ligne qui joint les deux lumieres, mais ſur cette ligne elle-même.

Ainſi dans cette nouvelle ſolution on a, par rapport aux ſignes, tout le contraire de ce

qu'on avoit dans la premiere, & ces deux ſolutions confirment ce que nous avons déja vû dans la premiere Partie ART. LXIII. que les inconnues qui deviennent négatives doivent toujours être priſes dans un ſens oppoſé à celui qu'on leur a donné en exprimant le Problême.

XIX.

Nous ôterons je crois tout embarras aux Lecteurs ſur ce Problême en prenant un exemple, ſuppoſons que $n = 4m$, c'eſt-à-dire que la plus grande lumiere ait quatre fois plus de force que l'autre ; en ſubſtituant cette valeur de n dans la formule générale de l'ART. XV. $x = \frac{a}{n-m} \times \overline{-m \pm \sqrt{mn}}$; elle deviendra $x = \frac{a}{3} \times \overline{\pm 2 - 1}$, c'eſt-à-dire ou $+ \frac{1}{3} a$ ou $- a$, qui fourniſſent deux points également propres à réſoudre le Problême, l'un placé entre les deux lumieres deux fois plus près de la foible que de la forte, & l'autre ſur le prolongement de la ligne qui joint ces lumieres, & à une diſtance de la foible égale à celle qui eſt entre les deux lumieres. Or il eſt très-facile de voir ſans Algebre que ces deux points réſolvent également le Problême, puiſqu'ils ſont l'un & l'autre deux fois plus près de la lumiere foible que de la forte, & que la forte eſt quadruple de la foible.

XX.

Les principes que nous venons de donner ſont ſuffiſants pour toutes les Equations du ſecond degré, mais comme les Commençans ne

peuvent gueres les posseder qu'en les pratiquant, nous allons les exercer à la résolution de plusieurs Equations, ils y trouveront cet avantage, qu'outre qu'ils en sçauront mieux la méthode, ils apprendront en même-tems de nouvelles opérations d'Algebre qui sont sans doute dues aux recherches que les premiers Analystes ont fait sur les Equations du second degré.

Nouveaux exemples de résolutions d'Equations du second degré.

Soit $bxx = 2c^2x + 2cca$, en ordonnant cette Equation, c'est-à-dire en passant les termes affectés de x du même côté & divisant tous les termes par le coefficient de xx, on aura $x^2 - \frac{2ccx}{b} = \frac{2cca}{b}$, aux deux membres de laquelle ajoutant $\frac{c^4}{bb}$, & prenant ensuite la racine quarrée, on aura $x - \frac{cc}{b} = \pm\sqrt{\frac{2ccab + c^4}{bb}} = \pm\frac{c}{b}\sqrt{2ab + cc}$; c'est-à-dire $x = \frac{cc \pm \sqrt{2ab + cc}}{b}$.

Soit $ff + gg - 2gx + xx = \frac{mmxx}{nn}$ qui devient d'abord $\frac{mm - nn}{nn} \times xx + 2gx = ff + gg$, & ensuite $xx + \frac{2gnn}{mm - nn}x = \frac{ffnn + ggnn}{mm - nn}$ ou $xx + \frac{2gnnx}{mm - nn} + \frac{ggn^4}{\overline{mm - nn}^2} = \frac{ffnn + ggnn}{mm - nn} + \frac{ggn^4}{\overline{mm - nn}^2}$.

$= \frac{ffnnmm + ggnnmm - ffn^4}{\overline{mm - nn}^2}$, d'où l'on tire

$x + \frac{gnn}{mm-nn} = \pm \frac{n\sqrt{ffmm+ggmm-ffnn}}{mm-nn}$ ou

$x = \frac{n}{mm-nn} \times -gn \pm \sqrt{ffmm+ggmm-ffnn}$.

Soit $abc - aff + 2afz = azz - bzz$ qui étant d'abord ordonnée deviendra

$zz - \frac{2af}{a-b} z = \frac{abc-aff}{a-b}$, ensuite

$zz - \frac{2af}{a-b} z + \frac{aaff}{\overline{a-b}^2} = \frac{abc-aff}{a-b} + \frac{aaff}{\overline{a-b}^2} = \frac{aabc - abbc + abff}{\overline{a-b}^2}$ qui

donne $z = \frac{af \pm \sqrt{aabc - abbc + abff}}{a-b}$

Soit à présent l'Equation $4a^2 - 2x^2 + 2ax = 18ab - 18bb$, en l'ordonnant on aura $xx - ax = 2aa - 9ab + 9bb$, ou $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{9}{4}aa - 9ab + 9bb$ qui donne $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{9}{4}aa - 9ba + 9bb}$.

On réduira aisément cette quantité si on a vû, & on ne pouvoit gueres manquer de le voir dans tout ce que nous venons de dire, que le quarré d'une quantité composé de deux termes, devoit être égal à la somme des quarrés de chacun de ces deux termes, & au double produit de ces deux termes.

Car trouvant dans la quantité $\frac{9}{4}aa - 9ba$

$+9bb$ les termes $\frac{9}{4}aa$ & $9bb$ qui ſont les quarrés de $\frac{3}{2}a$ & de $3b$, & le terme $9ab$ qui eſt le double produit de $\frac{3}{2}a$ & de $3b$, on voit aiſément que cette quantité $\frac{9}{4}aa - 9ba + 9bb$ eſt le quarré de $\frac{3}{2}a - 3b$. Donc au lieu de l'expreſſion $\sqrt{\frac{9}{4}aa - 9ba + 9bb}$, on peut écrire ſimplement $\frac{3}{2}a - 3b$: donc la valeur de x eſt alors $\frac{1}{2}a \pm \frac{3}{2}a \mp 3b$, c'eſt-à dire ou $2a - 3b$, ou $-a + 3b$, en effet l'on voit que ces valeurs réſolvent également l'Equation donnée.

XXI.

Comme dans les différentes Equations du ſecond dégré qu'on peut avoir à réſoudre, il arrivera ſouvent des cas de même nature que celui qu'on vient de traiter ; il faut avoir quelque méthode ſûre & générale pour reconnoître les quantités qui ſont des quarrés ; & pour trouver leurs racines, cette méthode eſt aiſée à tirer des principes que nous venons d'employer dans l'exemple précédent, en voici le procédé ſur un autre Exemple.

Procédé de l'extraction de la racine quarrée expliqué ſur un exemple.

Soit la quantité $30ab + 9bb + 25a^2$ dont on demande la racine quarrée.

J'ordonne d'abord cette quantité par rapport à une des lettres qu'elle contient, par rapport à a, par exemple, & j'écris par conſéquent cette quantité, ainſi qu'on la voit dans la Table ci-jointe caſe 1.

Je prends enſuite la racine du premier terme $25a^2$, laquelle eſt $5a$ que je prends pour premier terme de la racine cherchée, & que

j'écris à côté de la quantité proposée $25a^2 + 30ba + 9bb$, ayant tiré auparavant une barre pour éviter la confusion. Je place alors sous la proposée le quarré $25a^2$ de $5a$ en lui donnant le signe —, je tire une barre & je réduis, j'ai par ce moyen la quantité $30ba + 9bb$ que j'écris sous la barre; cela fait, je double $5a$, ce qui me donne $10a$ que j'écris au-dessus de $5a$, & je divise ensuite le premier terme $30ba$ de la quantité $30ba + 9bb$ par $10a$, & j'écris le quotient $3b$ qui est le second terme de la racine cherchée à côté de $5a$, je l'écris en même-tems à côté de $10a$, & je multiplie ce nouveau terme $3b$ de la racine par la quantité supérieure $10a + 3b$, en observant comme dans la division de changer les signes en écrivant le produit sous la quantité $30ab + 9bb$; faisant alors la réduction, & voyant que tout se détruit, je conclus que $5a + 3b$ est la racine cherchée.

XXII.

Pour fortifier les Commençans dans la méthode d'extraire les racines quarrées, il ne sera pas inutile de leur faire parcourir les deux exemples suivans.

Soit d'abord proposé d'extraire la racine quarrée de la quantité $4a^2 - 4ba + 4ca + bb - 2cb + cc$ ordonnée par rapport à a. Autres exemples d'extraction de racine quarrée.

Je commence par prendre la racine de $4a^2$, laquelle est $2a$ que j'écris à côté de la proposée, (voyez la seconde case de la Table cijointe) je retranche ensuite le quarré $4aa$,

& j'écris le reste $-4ba+4ca+b^2-2cb+cc$, je double $2a$, & j'écris le double $4a$ au-dessus, je divise le terme $-4ba$ par $4a$, & j'écris le quotient $-b$, tant à côté de la racine que du diviseur $4a$, multipliant alors $-b$ par $4a-b$, j'ai en changeant les signes $+4ba-bb$ qui étant placé sous le dividende donne après la réduction $+4ca-2cb+cc$ qui doit servir encore de dividende, je double alors la racine $2a-b$, & j'écris le double $4a-2b$ au-dessus, je divise $+4ca$ par $4a$, & j'écris le quotient $+c$ à côté de la racine $2a-b$, & à côté du diviseur; faisant ensuite la multiplication de $+c$ par $4a-2b+c$, & écrivant avec des signes differens le produit sous le dividende, tout se détruit, d'où je conclus que la racine est possible, & qu'elle est $2a-b+c$.

Soit ensuite proposé d'extraire la racine quarrée de la quantité $4x^4+8ax^3+4a^2x^2+16b^2x^2+16b^2ax+16b^4$ ordonnée par rapport à x, en suivant les opérations qui sont écrites dans la table ci-jointe case 3, on verra facilement que la racine de cette quantité est de $2xx+2ax+4bb$.

XXIII.

Dans les différens exemples que nous avons donné concernant les résolutions des Equations du second dégré, les Commençans n'ont gueres pû trouver de difficultés que lorsqu'il étoit question de réduire les quantités radicales en ôtant de dessous le signe,

Case 1.

$4a - 2b + c$
$4a - b$
$2a - b + c$

Case 2.

$16b^4$	$4x^2 + 4ax + 4b^2$
	$4x^2 + 2ax$
	$2x^2 + 2ax + 4b^2$
$6b^4$	

b^4
b^4

Case 3.


5-7-219

les quantités quarrées qui étoient des produisans de la quantité radicale ; en effet cette opération eſt la plus délicate de celles qui peuvent entrer dans la réſolution des Equations du ſecond dégré , il eſt donc important que les Commençans s'appliquent à la pratiquer facilement. Pour les aider à y parvenir , nous joindrons ici les exemples ſuivans.

Exemples de réduction de quantités radicales.

$$\sqrt{48aabc} = 4a\sqrt{3bc}$$

$$\sqrt{\frac{a^3b - 4aabb + 4ab^3}{cc}} = \frac{\overline{a-2b}\sqrt{ab}}{c}$$

$$\sqrt{\frac{aahhmm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}} = \frac{am}{pz}\sqrt{hh + 4mp}$$

$$6\sqrt{\frac{75}{98}abb} = \frac{30b}{7}\sqrt{\frac{3a}{2}}.$$

XXIV.

Les quantités qui n'ont point de racines exactes ſont dites incommenſurables ou irrationelles.

Preſqu'auſſitôt que les Equations du ſecond dégré ont fait connoître les quantités irrationelles ou incommenſurables (on appelle ainſi les quantités qui n'ont point de racines exactes) on a été obligé de faire ſur ces mêmes quantités les mêmes opérations que ſur les quantités rationelles ou commenſurables, c'eſt-à-dire qu'on a eu à ajouter , à ſouſtraire , à multiplier , à diviſer des quantités, ou toutes incommenſurables , ou en partie incommenſurables , & en partie commenſurables.

L'addition & la ſouſtraction de ces quantités ne ſuppoſent que leur réduction.

Quant à l'addition & à la ſouſtraction des quantités radicales , elles ne renferment aucune difficulté que celles de la réduction de ces mêmes quantités à leurs plus ſimples expreſſions.

Par exemple, s'il faut ajouter $\sqrt{48abb}$ avec $b\sqrt{75a}$, je change la premiere de ces quantités en $4b\sqrt{3a}$, & la seconde en $5b\sqrt{3a}$, dont la somme est $9b\sqrt{3a}$.

De la même maniere $\sqrt{48c^3} - \sqrt{\frac{16}{27}c^3}$.

$$= \frac{32}{9}c\sqrt{3c}.$$

$$\sqrt{\frac{ab^3}{cc}} + \frac{1}{2c}\sqrt{a^3b - 4aabb + 4ab^3}$$

$$= \frac{a}{2c}\sqrt{ab}.$$

$$a\sqrt{\frac{a^3b}{3aa + 6ac + 3cc}} - \frac{bc\sqrt{ab}}{a + c}$$

$$= \frac{aa}{\sqrt{3}} - bc \times \frac{\sqrt{ab}}{a+c}.$$

XXV.

Multiplication des incommensurables.

A l'égard de la multiplication, si les quantités qu'on a à multiplier sont toutes deux incommensurables, il est clair qu'il n'y aura autre chose à faire qu'à multiplier les quantités qui sont sous le signe radical, & mettre le même signe radical à la tête du produit; s'il se trouve alors des réductions à faire, on les fera comme ci-dessus.

Qu'on ait à multiplier, par exemple, $\sqrt{ab} \times \sqrt{ac}$ on écrira $\sqrt{aabc}$ ou $a\sqrt{bc}$

De même $\sqrt{3cd} \times \sqrt{4fgc} = \sqrt{12fgccd}$ $= 2c\sqrt{3fgd}$.

Lorsque les quantités radicales qu'on aura à multiplier seront égales, il faudra simplement ôter le signe radical. Pour multiplier, par exemple $\sqrt{a^3cd}$ par $\sqrt{a^3cd}$, on écrit simple-

ment la quantité a^3cd sans signe radical.

Si la quantité qui multiplie un radical est rationelle, il faut se contenter de l'écrire devant le signe avec une barre au-dessus lorsqu'elle a plusieurs termes; si on vouloit la faire entrer sous le signe radical, il faudroit la quarrer auparavant.

Par exemple, le produit de $a+b$ par $\sqrt{\frac{ffg}{aa-bb}}$ est $\overline{a+b}\sqrt{\frac{ffg}{aa-bb}}$

ou $\sqrt{\frac{ffg \times \overline{aa+2ab+bb}}{aa-bb}}$

ou $\sqrt{\frac{ffg \times \overline{a+b}}{a-b}}$ ou $\frac{f\sqrt{ag+bg}}{\sqrt{a-b}}$.

$$2a\sqrt{\frac{aa+bb}{c}} \times -3a\sqrt{\frac{aa+bb}{d}}$$

$$= -\frac{6aa \times \overline{aa+bb}}{\sqrt{cd}} = -\frac{6a^4+6aabb}{\sqrt{cd}}.$$

$\sqrt{a+b} \times \sqrt{a-b} = \sqrt{aa-bb}$.

S'il est question de multiplier des quantités composées de plusieurs autres, ou toutes radicales, ou en partie radicales & en partie incommensurables, l'opération n'en sera pas plus difficile que les précédentes, pourvû qu'on se rappelle les régles ordinaires des multiplications des quantités complexes.

Par exemple, $\overline{3a\sqrt{bc}-2b\sqrt{ac}} \times 2c\sqrt{ab}$ $= 6abc\sqrt{ac} - 4abc\sqrt{bc}$.

$\overline{a+\sqrt{aa-bb}} \times \overline{a+\sqrt{aa-bb}}$ $= 2aa-bb+2a\sqrt{aa-bb}$.

$$\overline{a + \sqrt{aa - xx}} \times \overline{a - \sqrt{aa - xx}} = xx.$$

XXVI.

Division des Incommensurables.

Lorſqu'il s'agira de diviſer deux quantités irrationnelles l'une par l'autre, on diviſera les quantités qui ſont ſous le ſigne, & l'on mettra le ſigne devant le quotient.

S'il faut diviſer une quantité irrationelle par une rationnelle, on mettra ſimplement la rationnelle ſous l'autre avec une barre aſſez longue pour qu'on puiſſe connoître que le ſigne ne porte pas deſſus, ſi on veut au contraire, que le ſigne radical y porte, il faudra quarrer le diviſeur.

S'il y a des quantités commenſurables devant les radicaux, on les diviſera à l'ordinaire, & on écrira leur quotient à côté du quotient radical : toutes ces choſes s'entendront ſans aucune peine par les exemples

$$\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}} = \sqrt{b}\,; \quad \frac{ac\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}} = c\sqrt{c}\,; \quad \frac{12\,ac\sqrt{6bc}}{4c\sqrt{2b}} = 3\,a\sqrt{3c}$$

$$\frac{\sqrt{aa - xx}}{\sqrt{a + x}} = \sqrt{a - x}\,; \quad \frac{\sqrt{aabb - bbxx}}{a - x} = b\sqrt{\frac{a + x}{a - x}}$$

XXVII.

Ce qu'on vient de dire concernant les Equations du ſecond dégré ſuffit lorſque ces Equations ne renferment qu'une inconnue ; mais comme on rencontre ſouvent des Problêmes dans leſquels il eſt néceſſaire d'en employer

plusieurs, il faut voir comment l'on traite ces Problêmes, nous prendrons dans cette vûe l'exemple suivant.

Problême du second dégré demandant plusieurs inconnues.

*Trouver trois quantités en progression * géométrique, dont la somme soit donnée, ainsi que la somme de leurs quarrés.*

Soient les trois quantités cherchées x, y, z, on aura par la nature des progressions $x : y = y : z$, c'est-à-dire $yy = xz$; de plus, parceque leur somme est donnée, en nommant cette somme a, on aura $x + y + z = a$, enfin en nommant la somme de leurs quarrés bb on aura par la derniere condition du Problême $xx + yy + zz = bb$.

Pour faire usage de ces trois Equations on commencera par chasser z au moyen de sa valeur $a - x - y$ tirée de l'Equation $x + y + z = a$; substituant donc cette valeur de z dans les deux autres Equations, elles se changeront en $2yy + 2xx + 2xy + aa - 2ax - 2ay = bb$, & $yy = ax - xx - xy$. Pour chasser ensuite celle qu'on voudra des deux inconnues que renferment ces deux Equations, on trouvera la valeur que cette inconnue a dans chacune de ces Equations, & on égalera les deux valeurs que l'on aura par ce moyen, or ces deux opérations

* Trois quantités dont la premiere est à la seconde, comme la seconde à la troisiéme, telles que 8, 12, 18, par exemple, sont dites en progression géometrique ou en proportion continue. On ne sçauroit entendre la théorie des proportions qu'on ne sçache en même-tems celle des progressions.

sont faciles par les principes précédens ; on aura pour la premiere Equation

$$x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{bb}{2} - \frac{aa}{4} - \frac{3}{4}yy + \frac{1}{2}ay}$$

& pour la seconde

$x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ay - \frac{3}{4}yy}$, il n'y a donc plus qu'à égaler ces deux valeurs, ce qui donnera l'Equation

$$-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{bb}{2} - \frac{aa}{4} - \frac{3}{4}yy + \frac{1}{2}ay}$$

$= -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ay - \frac{3}{4}yy}$ qu'il ne s'agit plus que de résoudre.

On remarquera premierement que les termes $-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a$ sont communs des deux côtés, & que par conséquent l'Equation se réduit à

$$\pm \sqrt{\frac{bb}{2} - \frac{aa}{4} - \frac{3}{4}yy + \frac{1}{2}ay}$$

$= \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ay - \frac{3}{4}yy}$. Or en quarrant les deux membres de cette Equation, les deux radicaux disparoissent tout de suite, & l'Equation devient en réduisant $ay = \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb$ qui donne $y = \frac{aa - bb}{2a}$, substituant ensuite cette valeur de y dans l'une des précédentes de x, on aura .... $x = \frac{1}{4}a + \frac{bb}{aa}$

$$\pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - \frac{3}{16}aa + \frac{3}{8}bb - \frac{3b^4}{16aa}}$$

ou $x = \frac{bb + aa + \sqrt{10bbaa - 3a^4 - 3b^4}}{4a}$

& en substituant la valeur de x & celle de y dans $z = a - x - y$, on aura enfin

$$z = \frac{aa + bb + \sqrt{10bbaa - 3a^4 - 3b^4}}{4a}$$

XXVIII.

Comme on eſt arrivé dans cette ſolution à une valeur extrêmement ſimple pour y, après avoir eu des radicaux aſſez compoſés, on doit ſoupçonner qu'on pouvoit y arriver par une voye plus courte; en effet avec un peu de reflexion, on trouve facilement la méthode ſuivante.

Soient repriſes les deux Equations

Autre maniere de reſoudre les Equations précédentes.

$x^2 - ax + yx = \frac{bb}{2} - \frac{aa}{2} - y^2 + ay$ & $x^2 + xy - ax = -yy$; en retranchant ces deux Equations l'une de l'autre on a

$o = \frac{bb}{2} - \frac{aa}{2} + ay$ d'où l'on tire

$y = \frac{aa - bb}{2a}$ qui étant ſubſtitué dans l'une ou l'autre de ces deux Equations donne.....

.... $x^2 + \frac{aax - bbx}{2a} - ax$

$= \frac{-a^4 + 2aabb - b^4}{4aa}$ ou $x^2 - \frac{\overline{bb+aa}\times x}{2a}$

$= \frac{-a^4 + 2aabb - b^4}{4aa}$ d'où l'on tire la même valeur de x que ci-deſſus.

XXIX.

Dans ce Problême on a eu des quantités qui ſe ſont détruites par une eſpece de hazard, ce qui a extrêmement ſimplifié les calculs; mais comme les Equations du ſecond

dégré à plusieurs inconnues n'offrent pas toujours de pareilles facilités, il faut sçavoir ce qu'on feroit dans des cas moins simples. Pour cela soit pris, par exemple les deux Equations $x^2 + ax - 2xy = aa + 2yy$; $xx - 2ax + xy = 2aa - yy$.

Exemple d'Equation du second dégré à deux inconnues plus compliqué que le précédent.

La premiere de ces Equations donne $x = -\frac{1}{2}a + y \pm \sqrt{\frac{3}{4}aa - ay + 3yy}$, l'autre donne $x = a - \frac{1}{2}y \pm \sqrt{3aa - ay - \frac{3}{4}yy}$ égalant ensuite ces deux valeurs & réduisant on a $-\frac{3a}{2} + \frac{3}{2}y \pm \sqrt{\frac{5}{4}aa - ay + 3yy}$ $= \pm\sqrt{3aa - ay - \frac{3}{4}yy}$.

Pour faire ensuite évanouir les radicaux de cette Equation, je commence par quarrer ses deux membres, ce qui me donne $\frac{9}{4}yy - \frac{9}{2}ay + \frac{9}{4}aa \pm \overline{3y - 3a}\sqrt{\frac{5}{4}aa - ay + 3yy} + \frac{5}{4}aa - ay + 3yy = 3aa - ay - \frac{3}{4}yy$ qui contient encore un radical; afin de le faire disparoître, j'écris ainsi cette Equation .... $-\frac{1}{2}aa + \frac{9}{2}ay - 6yy = \pm\overline{3y - 3a}\sqrt{\frac{5}{4}aa - ay + 3yy}$, en la réduisant & laissant la quantité radicale.... $\pm\overline{3y - 3a}\sqrt{\frac{5}{4}aa - ay + 3yy}$ seule d'un côté de l'Equation, cela fait, je quarre les deux membres, & j'ai

$\frac{1}{4}a^4 - \frac{9}{2}a^3y + \frac{105}{4}aayy - 54ay^3 + 36y^4$
$= \overline{9yy - 18ay + 9aa} \times \overline{\frac{5}{4}aa - ay + 3yy}$

Equation finale à laquelle conduisent ces Equations.

ou en réduisant

$9y^4 + 9ay^3 - 30aayy + 27a^3y = 11a^4$

c'est-là l'Equation qui résulte des deux précédentes,

dentes, & celle qu'il faudroit résoudre pour avoir la solution du Problême qui auroit donné ces deux Equations, on voit par-là qu'il n'en est pas des Equations du second dégré à plusieurs inconnues, comme de celles du premier qui ne donnent jamais une Equation finale d'un autre dégré qu'elles.

XXX.

Autre maniere de traiter le même exemple.

On peut sans avoir la peine de résoudr les Equations du second dégré, & de chasser ensuite leurs radicaux, parvenir également à l'Equation finale.

Soit repris pour le faire voir les deux Equations précédentes, & soit tirée la valeur de xx de chacune d'elles, la premiere fournira $x^2 = aa + 2yy - ax + 2xy$, la seconde $x^2 = 2aa - yy + 2ax - xy$, égalant ces deux valeurs on a $aa + 2yy + 2xy - ax = 2aa - yy - xy + 2ax$, d'où l'on tire $x = \frac{3yy - aa}{3a - 3y}$, qui étant substitué dans l'une ou l'autre des deux Equations données, dans $xx - 2ax + xy = 2aa - yy$, par exemple, la change en

$$\frac{9y^4 - 6aayy + a^4}{\overline{3a - 3y}^2} + \frac{\overline{y - 2a} \times \overline{3yy - aa}}{3a - 3y}$$

$= 2aa - yy$, qui étant réduite donne la même Equation

$$9y^4 + 9ay^3 - 30aayy + 27a^3y = 11a^4.$$

XXXI.

Pour rompre les Commençans à l'usage de cette méthode qui est d'un grand usage dans l'analyse, nous allons l'appliquer aux deux Equations

$$x^2 + axy + bx = cy^2 + dy + e$$
$$x^2 + fxy + gx = hy^2 + iy + k$$

qui contiennent chacune la plus grande complication que puissent avoir les Equations du second dégré à deux inconnues.

Tirant une valeur de xx de chacune de ces Equations & les égalant on aura

$$\overline{a - f} \times xy + \overline{b - g} \times x = \overline{c - h} \times y^2 + \overline{d - i} \times y + e - k$$

laquelle, en faisant pour abréger les calculs,

$a - f = l$; $b - g = m$; $c - h = n$;
$d - i = p$, $e - k = q$

se change en $lxy + mx = ny^2 + py + q$

d'où je tire $x = \dfrac{ny^2 + py + q}{ly + m}$ que je substitue dans l'une ou dans l'autre des deux Equations données, dans la premiere, par exemple, j'ai

$$\frac{\overline{ny^2 + py + q}^2}{\overline{ly + m}^2} + \frac{\overline{ay + b} \times \overline{ny^2 + py + q}}{ly + m}$$
$$= cy^2 + dy + e$$

ou $\overline{ny^2 + py + q}^2 + \overline{ay + b} \times \overline{ny^2 + py + q} \times \overline{ly + m}$
$= \overline{cy^2 + dy + e} \times \overline{ly + m}^2$

En faisant alors les opérations indiquées, réduisant & ordonnant, il vient enfin

$$y^4 + \frac{bln + amn + alp + 2np - 2mlc - l^2 d}{aln + nn - l^2 c}\, y$$

$$+\frac{bmn+qal+pbl+pam+p^2+2nq-m^2c-2mld-el^2}{aln+nn-l^2c}y^2$$

$$+\frac{blq+amq+bmp+2pq-m^2d-2mel}{aln+nn-l^2c}y$$

$$=\frac{m^2e-q^2-bmq}{aln+n^2-l^2c}$$, Equation du quatriéme dégré résultant des deux Equations du second dégré les plus générales.

XXXII.

y étant à un dégré quelconque, & x seulement au second dégré, on traiteroit de même les deux Equations.

Si on avoit des Equations telles que $xxy + axy = abb$ & $xxyy + ccyx = a^4$, ces Equations ne seroient point comptées parmi celles du second dégré à cause que le produit inconnu de x^2 par y est de trois dimensions & que celui de x^2 par y est de quatre dimensions, mais la méthode précédente serviroit avec la même facilité a chasser les x de ces deux Equations. Pour le faire voir, supposons que α représente toutes les quantités composées d'y & de connues, à quelque dégré qu'elles montent, qui peuvent multiplier x^2 dans l'une des Equations données; β toutes celles qui multiplient x dans la même Equation; γ les quantités entierement connues qui sont de l'autre côté de la même Equation, c'est-à-dire que cette premiere Equation sera. $\alpha x^2 + \beta x = \gamma$. Que la seconde soit de même $\delta x^2 + \epsilon x = \varphi$.

On tirera de la premiere $x^2 = \frac{\gamma - \beta x}{\alpha}$, &

de la seconde $x^2 = \frac{\varphi - \epsilon x}{\delta}$ lesquelles étant égalées donnent $\gamma\delta - \beta\delta x = \varphi\alpha - \epsilon\alpha x$ d'où l'on tire $x = \frac{\varphi\alpha - \gamma\delta}{\epsilon\alpha - \beta\delta}$, qui étant substitué dans l'Equation $\alpha x^2 + \beta x = \gamma$, donne

$$\alpha \times \overline{\varphi\alpha - \gamma\delta}^2 + \beta \times \overline{\alpha\epsilon - \beta\delta} \times \overline{\varphi\alpha - \gamma\delta}$$

$= \gamma \times \overline{\epsilon\alpha - \beta\delta}^2$ dans laquelle mettant pour $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \varphi$ leurs valeurs composées de y, & de connues l'on aura l'Equation cherchée.

XXXIII.

Ce qu'il faudroit faire pour arriver à l'Equation finale lorsque x seroit au troisiéme dégré.

Si les x ainsi que les y montoient chacunes à des dégrés plus haut que le second, on pourroit encore dans ce cas employer la méthode précédente, supposons, par exemple, qu'on ait les deux Equations $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x = \delta$, & $\epsilon x^3 + \varphi x^2 + \chi x = \eta$ dans lesquelles $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \varphi, \chi, \eta$ représentent toutes sortes de quantités composées d'y & de connues, on commencera par prendre x^3 dans chacune de ces Equations, & on égalera ses deux valeurs, ce qui donnera

$$\frac{\delta - \beta x^2 - \gamma x}{\alpha} = \frac{\eta - \varphi x^2 - \chi x}{\epsilon} \text{ ou}$$

$$\delta\epsilon - \epsilon\beta x^2 - \gamma\epsilon x = \eta\alpha - \varphi\alpha x^2 - \chi\alpha x$$

ou $\overline{\varphi\alpha - \epsilon\beta} \times x^2 = \overline{\gamma\epsilon - \chi\alpha} \times x + \eta\alpha - \delta\epsilon$ dans laquelle x n'est qu'au second dégré. Multipliant ensuite cette Equation par αx, ainsi que l'Equation $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x = \delta$

par $\varphi\alpha - \varepsilon\beta$, j'ai les deux Equations

$$\overline{\varphi\alpha^2 - \alpha\varepsilon\beta} \times x^3 = \overline{\gamma\varepsilon\alpha - \chi\alpha^2} \times x^2 + \overline{\eta\varepsilon\alpha - \delta\varepsilon\alpha} \times x$$

$$\& \overline{\varphi\alpha^2 - \varepsilon\iota} \times x^3 + \overline{\beta\varphi\alpha - \beta^2\varepsilon} \times x^2 + \overline{\gamma\varphi\alpha - \gamma\varepsilon\beta} \times x = \delta \times \overline{\varphi\alpha - \varepsilon\beta}.$$

Desquelles je chasse x^3 comme des deux premieres Equations, ce qui me donne

$$\overline{\alpha \times \overline{\gamma\varepsilon - \chi\alpha} + \beta \times \overline{\varphi\alpha - \beta\varepsilon}} \times x^2$$

$$+ \overline{\alpha \times \overline{\eta\varepsilon - \delta\varepsilon} + \gamma \times \overline{\varphi\alpha - \varepsilon\beta}} \times x$$

$= \delta \times \overline{\varphi\alpha - \varepsilon\beta}$. Dans laquelle x ne monte non plus qu'au second dégré, voilà donc le Problême réduit présentement au cas qu'on a résolu dans l'article précédent, c'est-à-dire à celui où l'on a deux Equations dans lesquelles l'inconnue x ne monte qu'au second dégré; il est donc inutile d'achever ici le calcul, puisqu'il n'auroit de difficulté que celle de sa longueur.

XXXIV.

Si l'inconnue qu'on veut chasser des deux Equations proposées, s'y trouvoit élevée à un dégré plus haut que le troisiéme, on voit bien que par une opération semblable à la précédente on les changeroit d'abord en deux autres Equations d'un dégré moindre, & que par ce moyen on parviendroit toujours à chasser entierement l'inconnue.

Ce seroit la même chose si x montoit à des dégrés plus élevés.

XXXV.

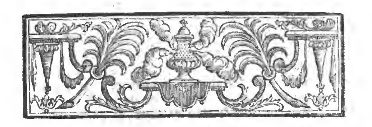
Si au lieu de deux inconnues on en avoit trois

Et s'il y avoit plus de deux inconnues on parviendroit de même à l'Equation finale.

élevées chacune à un dégré quelconque, il est clair que pourvû qu'on eut trois Equations, on parviendroit par la même méthode à une Equation finale qui ne contiendroit que celle que l'on voudroit de ces trois inconnues; car oubliant d'abord une de ces trois inconnues, deux des trois Equations suffiroient pour arriver à une seule qui ne renfermeroit que l'inconnue oubliée, & que celle que l'on voudroit des deux autres inconnues. Faisant ensuite la même opération avec l'une des deux Equations employée dans la premiere opération & la troisiéme Equation, on parviendroit à une autre Equation, entre les deux mêmes inconnues, c'est-à-dire que le Problême seroit réduit à celui où l'on a deux Equations à deux inconnues, d'où l'on parviendroit enfin à une seule inconnue renfermée dans une Equation.

Si on avoit quatre Equations & quatre inconnues, on réduiroit de même la question à trois Equations & trois inconnues, puis à deux Equations & deux inconnues, puis enfin à une seule Equation & à une inconnue; Il en seroit de même pour un plus grand nombre d'Equations & d'inconnues.

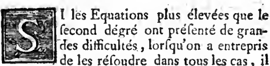




ELEMENS D'ALGEBRE.

TROISIE'ME PARTIE.

Où l'on donne quelques principes généraux pour les Equations de tous les dégrés, avec la méthode de tirer de ces Equations, celles du premier & du second dégré qu'elles peuvent renfermer.



SI les Equations plus élevées que le fecond dégré ont préfenté de grandes difficultés, lorfqu'on a entrepris de les réfoudre dans tous les cas, il a été du moins affez facile de faire fur ces Equations des réfléxions générales qui pouvoient en faire connoître la nature, & fervir

à les résoudre dans beaucoup de cas particuliers.

Ayant vû, par exemple que les Equations du premier dégre n'avoient qu'une racine, que celles du second en avoient deux, on a été porté à croire que celles du troisiéme en avoient trois & ainsi de suite, & pour s'assurer de cette vérité, ou plûtôt pour comprendre comment une Equation pouvoit avoir autant de racines qu'elle a de dégrés, on a cherché l'inverse du Problême qu'on s'étoit proposé d'abord, c'est-à-dire qu'au lieu de chercher les racines d'une Equation, on a cherché quelle seroit l'Equation qui auroit pour ses racines des quantités données, problême infiniment plus facile que le premier.

I.

Maniere de former une Equation par le moyen de ses racines.

Qu'on demande, par exemple quelle est l'Equation dans laquelle x pourra avoir également pour valeur ou 2, ou 3, ou 5; on n'a qu'à former ces trois Equations simples $x-2=0$; $x-3=0$, $x-5=0$, multipliant ensuite les deux premieres l'une par l'autre, & leur produit par la troisiéme, on a $x^3-10x^2+31x-30=0$, dans laquelle on peut supposer également $x=2$, ou $=3$, ou $=5$. On voit aisément que chacune de ces valeurs étant substituée à la place de x dans l'Equation $x^3-10x^2+31x-30=0$, doit la résoudre, ou ce qui revient au même, en doit faire évanouir tous les termes, car cette Equation pouvant s'écrire ainsi $\overline{x-2}\times\overline{x-3}\times\overline{x-5}=0$, chacune de

ſes parties étant égalée à zero doit, à cauſe qu'elle multiplie toutes les autres, les faire évanouir en même-tems ; or la ſuppoſition de $x = 2$, ou $= 3$, ou $= 5$ rend toujours zero l'une des trois parties $x - 2$, $x - 3$, $x - 5$.

II.

Une Equation a autant de racines que de dégrés.

Par cette méthode on voit comment une Equation peut avoir autant de racines que de dégrés ; pour traiter la queſtion plus en général, ſoient a, b, c, d, e, les racines d'une Equation, & partant $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, $x - d = 0$, $x - e = 0$, les Equations ſimples qui compoſent l'Equation dont les racines ſont ces quantités. En multipliant toutes ces Equations les unes par les autres, on aura

$$\begin{array}{llllll}
x^5 - a x^4 & + ab x^3 & - abc x^2 & + abcd x & - abcde = 0 \\
 - b & + ac & - abd & + abce & \\
 - c & + ad & - abe & + abde & \\
 - d & + ae & - acd & + acde & \\
 - e & + bc & - ace & + bcde & \\
 & + bd & - ade & & \\
 & + be & - bcd & & \\
 & + cd & - bce & & \\
 & + ce & - bde & & \\
 & + de & - cde & &
\end{array}$$

pour l'Equation dans laquelle x peut avoir à la fois les valeurs données a, b, c, d, e.

III.

Propriété des Equations de tous les dégrés.

Il eſt aiſé de tirer de cette Equation, ces remarques générales ſur les Equations de tous les dégrés

1° Que le premier terme n'eſt autre choſe

que l'inconnue élevée à la puiſſance exprimée par le nombre des racines ſans coefficient.

Que le ſecond terme contient l'inconnue élevée à une puiſſance de moins avec un coefficient égal à la ſomme des racines.

Que dans le troiſiéme, l'inconnue ſe trouve élevée à deux puiſſances de moins, & a pour coefficient la ſomme de tous les produits deux à deux qu'on peut faire de toutes les racines.

Que dans le quatriéme on aura de même l'inconnue élevée à trois puiſſances de moins avec un coefficient qui exprime la ſomme des produits de toutes les racines priſes trois à trois.

Il ſera ainſi des autres termes juſqu'au dernier qui n'aura aucune puiſſance de x, mais qui ſera le produit de toutes les racines les unes par les autres. Ces remarques ont ſervi de baſe en beaucoup de rencontres, ſoit pour trouver les racines des Equations propoſées, ſoit du moins pour connoître pluſieurs de leurs propriétés.

IV.

Dans une Equation ſans ſecond terme la ſomme des racines poſitives eſt égale à celle des négatives.

On a tiré, par exemple, de ces remarques qu'une Equation comme $x^5 - 3x^3 + 4x^2 + 7x - 3 = 0$ manquant de ſecond terme, doit avoir néceſſairement des racines poſitives & des négatives, de plus que la ſomme des unes doit être égale à la ſomme des autres, car ſans cette condition elles ne ſe ſeroient pas détruites pour faire évanouir le ſecond terme. Ainſi dans une Equation du troiſiéme dégré, où le ſecond terme manquera, il y aura toujours ou une racine négative égale aux deux poſiti-

ves ; ou une racine positive égale aux deux négatives.

V.

On a tiré encore des mêmes remarques que lorsqu'une Equation n'aura pas de dernier terme, il faudra qu'il y ait au moins une racine égale à zero ; ce qu'on auroit pû reconnoître aussi en faisant attention qu'une Equation telle que $x^3 + 5x^2 + 3x = 0$ qui manque de terme connu peut toujours se diviser par $x = 0$.

Une Equation qui n'a point de terme connu a au moins une racine égale à zero.

V I.

Lorsqu'on voudra retrouver dans une Equation les propriétés qu'on vient d'énoncer, on voit bien qu'il faudra que tous les termes de cette Equation soient du même côté, qu'ils soient ordonnés par rapport à l'inconnue, & que cette inconnue n'ait d'autre coefficient que l'unité au premier terme. De plus, que si quelqu'une des puissances de x manque dans l'Equation, il faudra toujours prendre pour quantiéme des autres termes ceux qu'ils auroient si ces puissances ne manquoient pas ; par exemple dans l'Equation $x^5 - 3x^3 + 4x - 5 = 0$ le terme $3x^3$ n'est que le troisiéme, parce que le second manque ; & le terme $4x$ est le cinquiéme, parce que le quatriéme manque. Si on vouloit donc appliquer les remarques précédentes à une telle Equation, on diroit que la somme de ses cinq racines est nulle, c'est-à-dire qu'elle a nécessairement des racines négatives & des racines positives, & que la somme des premieres est égale à la somme des au-

Conditions qu'il faut observer dans une Equation pour y trouver les propriétés précédentes.

tres. On diroit encore que la somme des produits de toutes les racines deux à deux est égale à -3; que la somme de tous les produits trois à trois est 0, que la somme de tous les produits quatre à quatre est $+4$, qu'enfin le produit de toutes les racines est -5.

VII.

Méthode pour avoir les racines commensurables d'une Equation.

De la propriété qu'a le dernier terme d'une Equation d'être égal au produit de toutes les racines, on peut tirer une méthode d'avoir toutes les racines qui sont commensurables dans une Equation, car elles doivent toutes se trouver en tentant la division de l'Equation par x plus ou moins chacun des diviseurs du dernier terme.

Par exemple, qu'on ait l'Equation $x^3 - 5xx + 7x - 3 = 0$, les diviseurs du terme -3, ne pouvant être que -1, -3, $+1$, $+3$; je tente la division par $x-1$, $x-3$, $x+1$, $x+3$; elle réussit par $x-1$ & par $x-3$, & je vois que l'Equation auroit pû s'écrire ainsi $\overline{x-1} \times \overline{x-1} \times \overline{x-3} = 0$, qui m'apprend que l'Equation proposée a trois racines, dont l'une est $+3$ & les autres toutes deux égales sont chacune $+1$.

Lorsqu'une Equation ne pourra pas se diviser par aucune Equation simple composée de $x +$ ou $-$ quelqu'un des diviseurs du dernier terme, on sera sûr que cette Equation n'aura aucune racine commensurable.

VIII.

Il se présente contre cette méthode de trou-

ver les racines commensurables, une difficulté qui, au premier coup d'œil, paroît assez considerable, c'est que si quelque racine de cette Equation étoit une fraction, on ne sçauroit pas comment la trouver parmi les diviseurs du dernier terme, parce qu'en admettant des diviseurs fractionnaires dans un nombre, on en peut trouver à l'infini. Mais il est aisé de répondre à cette difficulté en faisant remarquer que tous les coefficiens d'une Equation étant des nombres entiers, il est impossible que l'inconnue ait pour valeur une fraction. Je crois que ceux qui possedent un peu l'Arithmétique des fractions reconnoîtroient sans secours la vérité de cette proposition; mais pour leur faciliter les moyens de s'en assurer, prenons pour exemple une Equation comme $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, dans laquelle a, b, c, sont supposés des nombres entiers. Il est évident que x étant une fraction, x^3, x^2, en seront aussi, & que jamais la fraction qui exprime x^3 ne pourra se réduire à une qui ait le même dénominateur que x^2 ou son multiple ax^2. A plus forte raison la même fraction ne pourra pas non plus se réduire au même dénominateur que x ou son multiple bx, donc $x^3 + ax^2 + bx$ ne pourra jamais faire une fraction plus simple que x^3 qui est irréductible. Donc x ne peut jamais être une fraction dans de telles Equations.

Dans une Equation dont tous les coefficiens sont des entiers, l'inconnue ne sçauroit être une fraction.

IX.

Lorsqu'on aura une Equation dont les coefficiens seront des fractions, on ne pourra pas en la laissant avec ses fractions trouver par la

méthode précédente les racines commensurables qu'elle pourroit avoir; mais on pourra toujours par une transformation assez simple changer le Problême en un autre, où l'Equation a résoudre n'aura plus de fractions, sans donner de coefficient au premier terme.

Transformation par laquelle on fait évanouir les fractions d'une Equation quelconque.

Soit, par exemple l'Equation $x^3 + \frac{a}{b} x^2 + \frac{c}{d} x + \frac{e}{f} = 0$ (on verra aisément qu'une d'un dégré plus élevé n'auroit pas plus de difficulté) en faisant l'inconnue x égale à une autre inconnue y divisée par quelque nombre indéterminé m, je change l'Equation en une nouvelle $\frac{y^3}{m^3} + \frac{ay^2}{bm^2} + \frac{cy}{dm} + \frac{e}{f} = 0$ ou $y^3 + \frac{am}{b} y^2 + \frac{cm^2}{d} y + \frac{em^3}{f} = 0$, dans laquelle je vois que si m est divisible à la fois par b, par d, & par f; $\frac{am}{b}$, $\frac{cm^2}{d}$ & $\frac{em^3}{f}$ seront des nombres entiers. Or le Problême est réduit par-là à quelque chose de bien aisé, car le pis aller est de prendre pour m le produit des nombres b, d, f, & si ces nombres ne sont pas premiers * entr'eux, on trouvera aisément un nombre plus petit que leur produit qui sera divisible par tous les trois.

* On appelle en Arithmétique nombres premiers ceux qui n'ont point de diviseurs, tels que 5, 11, 31, &c. & on dit que deux nombres sont premiers entre eux lorsqu'ils n'ont aucun commun diviseur, tels sont 21 & 16, 18 & 35.

X.

L'Equation étant changée en une autre sans fraction, on cherchera les racines commensurables de cette derniere par la méthode précedente, & si elle n'en a pas, on sera sur que la premiere n'en avoit pas non plus, puisque x étant commensurable ne pourra jamais donner une quantité incommensurable en le divisant par le nombre m qui est commensurable aussi.

Par cette transformation la méthode précédente s'applique aux Equations fractionnaires.

XI.

La méthode précédente a cet inconvenient considérable que lorsqu'il arrive que le dernier terme a beaucoup de divisieurs, les calculs qu'il faut faire pour tenter toutes les divisions que cette méthode prescrit sont si longs, qu'on l'abandonneroit malgré l'avantage infini de s'étendre généralement aux Equations de tous les dégrés dont une ou plusieurs racines sont commensurables. C'est ce qui a engagé les plus habiles Analystes à perfectionner cette méthode en trouvant des moyens plus faciles que la division pour reconnoître les divisieurs qui ne doivent pas réussir. Voici comment on s'y est pris.

Inconvenient de la méthode précédente.

XII.

On a d'abord remarqué que si on faisoit dans la racine $x + a$ d'une Equation quelconque, ou ce qui revient au même dans le divisieur $x + a$ d'une quantité quelconque, x égal à un nombre donné, le nombre dans lequel se changeoit alors la racine devoit être un divisieur de la quantité proposée, dans laquelle on au-

Réfléxions qui ont servi à perfectionner cette méthode.

roit fait x égal au même nombre : c'est-à-dire, par exemple que si on a la quantité $x^3 - 2x - 21$ dont ont sçait que $x - 3$ est un diviseur, il arrivera qu'en faisant $x = 5$ le nombre 94 que devient $x^3 - 2x - 21$ par cette supposition est nécessairement divisible par le nombre 2 que devient $x - 3$ par la même supposition.

En partant de-là on a supposé dans la quantité dont on cherchoit un diviseur, x successivement égal à plusieurs nombres, tels par exemple que $+1, 0, -1$; on a commencé par ces suppositions, parce qu'elles donnent les substitutions les plus faciles. Ensuite on a cherché tous les diviseurs des nombres dans lesquels la quantité proposée se change par ces substitutions ; & on a fait ces remarques qui se présentoient naturellement après la premiere.

1° Que parmi tous les diviseurs du nombre venu par la supposition de $x = +1$ dans la quantité, on devoit trouver le nombre $1 + a$, puisque $x + a$ étoit le diviseur cherché.

2°. Que parmi tous les diviseurs venus par la supposition de $x = 0$, qui ne sont autre chose que les diviseurs du dernier terme de la quantité proposée, devoit être le nombre a.

3°. Que parmi tous les diviseurs du nombre venu par la supposition de $x = -1$, devoit être le nombre $-1 + a$.

XIII.

Principe fondamental pour trouver les racines commensurables.

Or comme les nombres $1 + a$, a, $-1 + a$ sont nécessairement tels que le premier surpasse le second d'une unité, & que le second surpasse le troisiéme

troisiéme d'une unité aussi, il étoit aisé de tirer de-là ce principe ; que de tous les diviseurs du nombre venu par la supposition de $x=0$, aucun ne pouvoit être le nombre demandé a, s'il ne se trouvoit en même-tems surpassé de l'unité par quelqu'un des diviseurs du nombre venu par la supposition de $x=1$, & s'il ne surpassoit en même tems d'une unité quelqu'un des diviseurs du nombre qu'a donné la supposition de $x=-1$. On voit bien qu'un tel principe doit faire éviter beaucoup de divisions inutiles dans la recherche des racines commensurables.

Si on trouve plusieurs nombres, parmi les diviseurs du nombre venu par la supposition de $x=0$, qui ayent les conditions qu'on vient de remarquer, on fera ensuite $x=2$, & on verra si parmi les diviseurs des nombres qui viennent alors, on trouve des nombres qui surpassent d'une unité ceux qu'a donné la supposition de $x=1$, & ainsi de suite.

Au reste, on voit bien que l'examen qu'on fait de tous ces diviseurs doit être double, c'est-à-dire que chacun d'eux doit être pris aussi-bien en $-$ qu'en $+$.

XIV.

Pour éclaircir cette méthode & pour en faciliter l'usage, nous allons en donner quelques exemples en faisant voir l'ordre qu'il faut garder dans le calcul pour ne s'y point tromper, & pour abreger, autant qu'il est possible, la peine du Calculateur.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Soit l'Equation $x^3 - 2x^2 - 13x + 6 = 0$ dont il s'agit de trouver les racines commensurables, ou ce qui revient au même, soit la quantité $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$ dont on demande les diviseurs d'une dimension.

Je commence par écrire (voyez la Table cy-jointe Case 1) l'une sous l'autre les suppositions 1, 0, -1 que je veux faire pour x; j'écris ensuite à côté de chacun de ces nombres les nombres $-8, +6, +16$ ou simplement 8, 6, 16 (à cause que les signes sont indifférens pour les diviseurs) dans lesquels se change successivement la quantité $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$ par ces suppositions, & je les sépare des premiers nombres par une barre verticale. J'écris dans une troisiéme colonne les nombres 1, 2, 4, 8; 1, 2, 3, 6; 1, 2, 4, 8, 16 qui sont les diviseurs des nombres précédens ; les quatre premiers à côté de 8 dont ils sont les diviseurs, les quatre seconds à côté de 6, & les cinq derniers à côté de 16.

Cela posé, pour trouver parmi les diviseurs 1, 2, 3, 6 du nombre 6 venu par la supposition de $x = 0$, celui qu'il faut ajouter ou retrancher à x pour avoir le diviseur cherché, ou plûtôt pour exclure de tous ces diviseurs ceux qui n'ont pas les conditions requises ; je commence par remarquer que 1 qui est le premier de ces diviseurs ne sçauroit être admis, soit qu'on le prenne en $+$, soit qu'on le prenne en $-$, car si on le prend en $+$, c'est-à-dire si on regarde $x + 1$ comme le diviseur cherché, 2 seroit ce que deviendroit ce diviseur par la supposition de $x = +1$,

& o ce qu'il deviendroit par la ſuppoſition de $x = -1$, & par conſéquent il faudroit trouver à la fois 2 dans les nombres de la premiere bande, & o dans ceux de la troiſiéme, or la ſeconde de ces conditions n'eſt pas remplie. Quant à ce que -1 ne convient pas non plus, c'eſt-à-dire que $x - 1$ n'eſt pas le diviſeur cherché, cela ſe tire de ce que ce diviſeur devenant o par la ſuppoſition de $x = +1$ & -2 par la ſuppoſition de $x = -1$, il faudroit par conſéquent trouver o dans les nombres de la premiere bande, & le nombre 2 dans ceux de la ſeconde. Or il n'y a que la ſeconde de ces deux conditions qui ait lieu. Je vois enſuite que le diviſeur 2 eſt auſſi dans le cas d'être rejetté, parce que ſi on le prend en $+$, c'eſt-à-dire ſi on regarde $x + 2$ comme le diviſeur cherché, on auroit $+3$ par la ſuppoſition de $x = 1$, & $+1$ par la ſuppoſition de $x = -1$, ce qui demanderoit qu'on trouvât les nombres 3 dans la premiere bande, & 1 dans la troiſiéme; or la premiere de ces deux conditions ne ſe trouve pas remplie. Et ſi l'on prenoit 2 en $-$, c'eſt-à-dire qu'on voulût que $x - 2$ fut le diviſeur, on auroit alors -1 & -3 pour les ſuppoſitions de $x = +1$ & de $x = -1$, ce qui demanderoit de trouver à la fois 1 dans la premiere bande, & 3 dans la troiſiéme, conditions dont il n'y a que la premiere qui ait lieu.

Ayant exclu 1 & 2, je prens le diviſeur 3, & je vois qu'en le prenant en $+$, c'eſt-à-dire en regardant $x + 3$ comme le diviſeur cherché,

il faudra trouver $+4$ par la suppofition de $x=+1$, & $+2$ par la suppofition de $x=-1$. Or je trouve effectivement 4 dans la premiere bande, & 2 dans la troifiéme. Donc $+3$ a les conditions requifes, je l'écris alors à la feconde bande, c'eft-à-dire vis à-vis le nombre dont il eft divifeur, & j'écris en même-tems les nombres $+4$ & $+2$ dans les bandes fupérieures & inférieures; non que ces nombres foient à joindre à x pour fervir de divifeurs à la quantité propofée, mais parce que n'ayant pas encore achevé l'examen des divifeurs, il fe pourroit trouver encore d'autres nombres que $+3$ qui auroient les conditions requifes; & qu'il faudroit alors faire de nouvelles fuppofitions pour reconnoître entre ces nombres ceux qu'il faudroit encore exclure. J'examine maintenant fi 3 pris en $-$ ne pourroit pas réuffir auffi bien qu'en $+$, c'eft-à-dire fi $x-3$ ne pourroit pas avoir les mêmes conditions pour être divifeur de la propofée, il faudroit pour cela trouver -2 & -4 par les fuppofitions de $x=+1$ & de $x=-1$, or ces nombres fe trouvent effectivement; donc jufqu'à préfent $x-3$ a auffi-bien les conditions néceffaires pour être divifeur que $x+3$ j'écris par conféquent dans une cinquiéme colonne verticale -2, -3, -4.

Je paffe enfin à l'examen de 6 & je vois que fi je le prends en $+$, il faudroit trouver $+7$ & $+5$ dans les bandes fupérieures & inférieures, ce qui n'arrive pas, & que fi je le prends en $-$ je devrois avoir -5 & -7 dans les mêmes

bandes, ce qui ne se trouve pas non plus. Je conclus donc qu'il n'y a que $x-3$ & $x+3$ qui puissent être des diviseurs commensurables & d'une dimension de la proposée.

Pour sçavoir si l'on est autant fondé à tenter la division par $x-3$ que par $x+3$; je remarque que si on faisoit une quatriéme bande en supposant $x=-2$ on devroit trouver -5 pour le quatriéme terme de la colonne $-2, -3, -4$; & $+1$ pour le quatriéme terme de la colonne $+4, +3, +2$, car il est clair que le diviseur $x-3$ deviendroit -5 par la supposition de $x=-2$, & que le diviseur $x+3$ deviendront $+1$ par la même supposition. Mais en faisant $x=-2$ dans la proposée $x^3-2x^2-13x+6$, elle devient 16 qui n'est pas divisible par 5 & qui l'est par 1. Donc $x-3$ ne sçauroit être un diviseur de cette quantité, donc s'il y en a un, il ne peut être que $x+3$, ou ce qui revient au même si $x^3-2x^2-13x+6$ a une racine comensurable, elle ne peut être que -3. Pour sçavoir si elle l'a effectivement, je divise $x^3-2x^2-13x+6$ par $x+3$, ce qui réussit & donne pour quotient exact $xx-5x+2$.

XV.

Pour que l'uniformité servit à la clarté dans cet exemple, j'ai examiné parmi les diviseurs 1, 2, 3, 6 du nombre 6 venu par la supposition de $x=0$ le nombre 1 comme les autres, mais on peut toujours se dispenser de faire aucun examen pour ce nombre, parce que s'il avoit à réussir, soit en $+$, soit en $-$, on l'auroit

appris déja en substituant $+1$ & -1 à la place de x dans l'Equation donnée.

Dans des nombres aussi simples que 8, 6, 16 il étoit aisé de ne pas oublier aucun de leurs diviseurs, parce que ces nombres en ont peu. Mais lorsque l'on a des nombres qui ont beaucoup de diviseurs, il faut les chercher avec un certain ordre pour les avoir tous. Un seul exemple suffira pour faire voir comment cette opération doit se faire.

XVI.

Maniere d'avoir tous les diviseurs d'un nombre.

Soit proposé de chercher tous les diviseurs du nombre 120. Je commence par tracer une barre verticale (voyez la Case 2 Table suivante) à gauche de ce nombre, puis je mets à gauche de cette barre à la hauteur de 120, l'unité comme étant son premier diviseur. J'essaye ensuite de diviser 120 par 2, comme la division réussit j'écris 2, & je le mets à gauche de la barre à la même hauteur que 60 quotient de la division que je mets à droite de la même barre.

J'essaye encore la division par 2 qui réussit, & donne 30 pour quotient, je mets alors le nouveau diviseur 2 sous le premier; & 30 sous 60. Je multiplie en même-tems le nouveau diviseur 2 par celui d'en haut 2, & je mets le produit 4 à gauche du second 2, comme étant un nouveau diviseur du nombre proposé 120. La raison de cette multiplication est que si 120 est divisible par 2 & sa moitié par 2, il doit l'être nécessairement par 4.

Comme 30 peut se diviser par 2 j'écris en-

core 2 à gauche de la barre & à la quatriéme ligne, & le quotient 15 à droite à la même ligne. Je multiplie en même-tems le nouveau diviſeur 2 par 4, ce qui me donne 8 pour un nouveau diviſeur du nombre propoſé. Je ne multiplie pas ce nouveau 2 par les premiers, parce qu'il m'en viendroit 4 qui eſt déja écrit.

15 ne pouvant pas ſe diviſer par 2 j'eſſaye de le diviſer par 3, ce qui me réuſſit & me donne 5 pour quotient que j'écris à droite dans la cinquiéme ligne auſſi-bien que le diviſeur 3 que j'écris à gauche; je multiplie enſuite 3 par 2, par 4 & par 8 que je trouve dans les bandes ſupérieures, & j'écris à gauche du 3 les produits 6, 12, 24, qui ſont, comme il eſt évident, des nouveaux diviſeurs du nombre propoſé.

5 n'ayant plus d'autre diviſeur que lui-même, je l'écris à gauche de la barre dans la cinquiéme ligne, & je mets en même-tems le produit de ce nombre par tous les diviſeurs précédens 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, & j'ai 10, 15, 20, 30, 40, 60, 120 que j'écris dans la même ligne à gauche de 5.

Cela fait, tous les nombres qui ſont à gauche de la barre, à compter depuis 1 juſqu'à 120 ſont tous les diviſeurs de 120. Il en ſeroit ainſi des autres nombres dont ont chercheroit tous les diviſeurs.

XVII.

Soit propoſé préſentement de chercher les racines commenſurables de l'Equation $x^5 - 12x^4 + 5x^3 - 61x^2 + 22x - 120 = 0$.

Autre exemple de la méthode de trouver les racines commenſurables.

Ayant écrit dans une premiere colonne verticale 1, 0, — 1 (Table suivante Case 3) pour les valeurs à donner successivement à x; & dans une autre colonne verticale les nombres 165, 120, 221 qu'on trouve par la substitution de ces valeurs dans la quantité

$$x^5 - 12x^4 + 5x^3 - 61x^2 + 22x - 120,$$

je place dans une troisiéme colonne les diviseurs de ces trois nombres, ce qui me donne les trois bandes

1, 3, 5, 11, 15, 33, 55, 165;
1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 30, 40, 60, 120;
1, 13, 17, 221

que je place chacune vis-à vis du nombre qui l'a produite cela fait parmi les diviseurs de 120. J'examine en premier lieu si le nombre 2 a les conditions requises, & je vois qu'en le prenant en + il s'accorde avec les nombres 3 & 1 pris en haut & en bas. J'écris donc dans la quatriéme colonne verticale +3, +2, +1.

Je vois ensuite que le même nombre pris en — ne réussit pas, parce qu'il faudroit alors — 3 en bas, ce qui ne se trouve pas.

Parcourant ensuite de la même maniere tous les autres diviseurs de 120, je trouve encore le nombre 12 qui étant pris en — a les conditions requises, pourvû qu'on prenne en — les nombres 11 & 13 qui sont au-dessus & au-dessous. J'écris donc dans une cinquiéme colonne verticale les trois nombres — 11, — 12, — 13.

Pour sçavoir présentement à laquelle des deux dernieres colonnes je dois m'arrêter, ou

plûtôt, par laquelle des deux quantités $x+2$ ou $x-12$ je dois tenter la division, je remarque que si c'étoit la premiere, il faudroit trouver zero en substituant -2 pour x dans l'Equation, ce qui n'arrive pas; donc il n'y a que la division par $x-12$ à tenter, je la tente & elle réussit en me donnant pour quotient x^4+5x^2-x+10. Ainsi $+12$ est une des valeurs de x dans l'Equation donnée & la seule commensurable.

XVIII.

Soit enfin $x^6-4x^5+3x^4-12x^3-5x^2+11x+36$. Ayant écrit (Case 4 Table suivante) dans une premiere colonne verticale les valeurs $1, 0, -1$ à donner à x; dans une seconde les nombres 30, 36, 40, dans lesquels la quantité proposée se change par ces suppositions, & dans une troisiéme tous les diviseurs 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 du nombre 30, les diviseurs 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 du nombre 36, les diviseurs 1, 2, 4, 5 8, 10, 20, 40 du nombre 40; je trouve parmi tous ces diviseurs quatre colonnes à écrire qui renferment les conditions requises, la premiere, $+3, +2, +1$, la seconde, $-2, -3, -4$, la troisiéme, $-3, -4, -5$, la quatriéme, $+10, +9, +8$.

Troisiéme application de la méthode de trouver les racines commensurables.

Pour décider alors entre ces quatre colonnes, je commence par faire $x=2$; & j'écris 2 au-dessus de 1 dans la premiere colonne, j'écris ensuite dans la seconde colonne 74, nombre dans lequel la quantité proposée se change par la supposition de $x=2$. Cela fait,

je vois sans me donner la peine de chercher les diviseurs de ce nombre que les deux colonnes $+3$, $+2$, $+1$, & $+10$, $+9$, $+8$, sont à rejetter, car si la premiere avoit lieu, il faudroit trouver $+4$ parmi les diviseurs de 74, ce qui n'arrive pas, & si c'étoit la seconde, il faudroit trouver $+11$ parmi les mêmes diviseurs, ce qui n'arrive pas non plus.

Je vois au contraire, que les nombres -1 & -2 que demandent les colonnes -2, -3, -4, & -3, -4, -5 sont des diviseurs de 74, j'écris donc les nombres -1 & -2 au-dessus de -2 & de -3 dans la seconde & la troisiéme colonne, & je cherche ensuite à exclure encore une de ces deux colonnes -1, -2, -3, -4, & -2, -3, -4, -5, ce qui devient bien facile, puisque si la premiere étoit à conserver, il faudroit trouver 0 par la supposition de $x = 3$, ce qui n'arrive pas; au lieu que -1 qui, par la colonne -2, -3, -4, -5 doit être un diviseur du nombre donné par la supposition de $x = 3$, ne peut pas manquer de l'être. Donc il n'y a de colonne à essayer que -1, -2, -3, -4, -5, c'est-à-dire qu'il n'y a de diviseur à tenter que $x - 4$. J'essaye en effet la division de la quantité proposée par $x - 4$, ce qui réussit & donne pour quotient $x^5 + 3x^3 - 5x - 9$. Ainsi $+4$ est une des deux valeurs de x dans l'Equation proposée & la seule commensurable.

XIX.

Après avoir vû comment on pouvoit tirer des Equations d'un dégré quelconque, les

Equations commensurables du premier qui en étoient les racines, il étoit naturel de chercher aussi à en tirer les Equations du second dégré qu'elles pouvoient renfermer : on devoit s'en promettre une aussi grande utilité, la solution des Equations du second dégré étant aussi complette que celle du premier.

Voici la méthode qu'on a imaginée pour y parvenir. Que $xx+bx+c=0$ représente l'Equation du second dégré qui peut être un des produisans d'une Equation donnée, ou ce qui revient au même que $xx+bx+c$, soit le diviseur cherché d'une quantité donnée; en faisant $x=0$ dans ce diviseur, il est clair qu'il se réduira au nombre c, & que ce nombre sera un des diviseurs du dernier terme de la quantité donnée.

Méthode pour trouver les Equations du second dégré commensurables dans une Equation donnée.

Si on fait ensuite $x=+1$ dans le diviseur x^2+bx+c, il se changera en $1+b+c$ qui sera un des diviseurs du nombre que l'on a en faisant de même dans la proposée $x=1$. Donc si on cherche tous les diviseurs de ce nombre & qu'après les avoir pris tant en $+$ qu'en $-$, on en retranche l'unité ce sera parmi tous les nombres, tant positifs que négatifs, que l'on aura par cette opération que devra se trouver le nombre égal à $b+c$.

Si on fait ensuite $x=-1$ tant dans la quantité proposée, que dans le diviseur $xx+bx+c$ qui devient alors $1-b+c$, on voit qu'en cherchant tous les diviseurs du nombre que devient la quantité par cette supposition, & re-

tranchant l'unité de tous ces diviſeurs, pris tant en — qu'en +, on aura parmi tous les nombres que ce calcul donnera celui qui exprime $-b+c$.

Or comme c eſt moyen arithmétique entre $b+c$ & $-b+c$, il s'enſuit que parmi les trois ſuites de nombres qu'on aura pour repréſenter $b+c$, c, $-b+c$, il ne faudra s'arrêter qu'à ceux qui ſeront en progreſſion arithmétique. Lorſqu'on aura trouvé trois nombres en progreſſion arithmétique, il eſt clair que celui qui répondra à la ſuppoſition de $x=0$ ſera celui qu'il faudra prendre pour c, & comme celui qui répondra à la ſuppoſition de $x=1$ repréſentera $b+c$, en retranchant le premier du ſecond, on aura b. Subſtituant enſuite ces deux nombres à la place de b & de c dans x^2+bx+c, on aura un diviſeur à tenter pour la quantité donnée, & le ſeul à eſſayer ſi on n'a trouvé qu'une progreſſion arithmétique parmi toutes les ſuites de nombres qu'ont donné les diviſeurs de la quantité où l'on a fait ſucceſſivement $x=1$, 0, -1. Si on a trouvé pluſieurs progreſſions arithmétiques, on ſe déterminera entre ces progreſſions à peu près comme dans le cas des diviſeurs ſimples, en faiſant de nouvelles ſuppoſitions pour x, comme -2, -3, ou $+2$, $+3$, &c.

Car qu'on ſuppoſe, par exemple $x=-2$, $x=-3$, &c. dans la quantité propoſée, il eſt clair que tous les diviſeurs, tant poſitifs que négatifs du nombre que l'on aura alors repréſenteront la quantité $4-2b+c$, $9-3b+c$, &c.

que devient x^2+bx+c lorſque $x=-2$ ou $x=-3$, &c. & que par conſéquent tous ces mêmes diviſeurs dont on aura retranché 4, 9, &c. repréſenteront $-2b+c$, $-3b+c$, &c. Or $-2b+c$, $-3b+c$, &c. étant d'autres termes de la progreſſion arithmétique $b+c, c, -b+c$, on n'aura donc plus qu'à chercher parmi les progreſſions arithmétiques trouvées précédemment celle qui ſe conſerve par ces nouvelles valeurs de x, & s'en ſervir comme on vient de l'expliquer pour déterminer les nombres b & c.

XX.

Application de la méthode précédente.

Soit par exemple la quantité $x^5+3x^4+2x^3+8x^2-36x+21$, dont on cherche un diviſeur de deux dimenſions.

Je commence par écrire dans une colonne verticale (Table ſuivante Caſe 5) les valeurs 1, 0, −1 que je veux donner à x. J'écris enſuite dans une nouvelle colonne verticale les nombres 1, 21, 65, dans leſquels la quantité propoſée ſe change par ces ſuppoſitions.

J'écris de même dans une troiſiéme colonne, à côté du premier nombre, ſon unique diviſeur 1; à côté de 21, ſes diviſeurs 1, 3, 7, 21; & à côté de 65 ſes diviſeurs 1, 5, 13, 65.

Cela fait, j'écris dans une quatriéme colonne les nombres 1, 0, 1 quarrés de 1, 0, −1 écrits dans la premiere colonne & valeurs de xx, par conſéquent, dans les mêmes ſuppoſitions de 1, 0, −1. Enfin je forme une cinquiéme colonne par ces conditions,

1°. Que la premiere bande —2, o se forme en retranchant 1 de 1 pris en — & de 1 pris en +.

2°. Que la seconde bande soit composée des nombres —21, —7, —3, —1, +1, +7, +21, les mêmes que les diviseurs qui sont à côté, mais écrits deux fois, l'une pour le signe —, l'autre pour le signe +.

3°. Que les nombres de la troisiéme bande soient — 66, — 14, —6, — 2, 0, +4, +12, +64, dont les premiers —66, —14, —6, — 2 soient trouvés en retranchant 1 des nombres 65, 13, 5, 1 pris en —, & les autres 0, +4, +12, +64 en retranchant 1 des mêmes nombres 1, 5, 13, 65 pris en +.

Pour déterminer ensuite les progressions arithmétiques qui sont dans ces trois suites de nombres, je commence par prendre dans la premiere bande le nombre — 2 pour le premier terme d'une progression, & je prends successivement pour seconds tous ceux de la seconde bande; je cherche en même-tems les troisiémes termes que ces premiers donneroient, & j'examine quels sont ceux de ces troisiémes qui se trouvent dans la troisiéme bande; or — 2 & — 21 doivent donner pour troisiéme terme —40 qui n'est point dans la troisiéme bande, je rejette donc 21, je prends alors —7 pour second terme, & comme il devroit donner —12 pour troisiéme terme, & que — 12 n'est pas dans la troisiéme bande, je rejette encore — 7, & de même — 3, parce que ce dernier devroit donner —4 qui ne se trouve pas non plus.

A l'égard de — 1 comme il donne o pour troisiéme, & que o se trouve dans la troisiéme bande, j'écris dans la sixiéme colonne la progression —2, — 1, o. De même + 1 pris pour second donnant + 4 qui se trouve encore, j'écris la seconde progression —2, + 1, + 4. Et comme + 7 & + 21 devroient donner chacun un troisiéme terme qui n'est pas dans la troisiéme bande, je les rejette. Les progressions qui peuvent commencer par 2 étant determinées, je passe à celles dont le premier terme seroit o, & pour les trouver, je prends ainsi que j'ai fait pour 2 tous les nombres de la seconde bande l'un après l'autre.

Je vois d'abord que —21 devroit donner pour troisiéme terme — 42 qui n'est pas dans la troisiéme bande. Je vois ensuite que — 7 donne — 14 qui se trouve, ainsi j'écris encore la progression o, — 7, — 14. De même — 3 & — 1 donnant — 6 & — 2 qui se trouvent aussi, j'écris les progressions o, — 3, — 6, & o, — 1, — 2. A l'égard des nombres + 1, + 7, + 21, ils ne donnent aucun troisiéme terme qui se trouve, ainsi je les rejette.

Pour voir présentement lesquelles de ces progressions il faut encore rejetter, je fais $x = -2$, & j'écris — 2 dans la premiere colonne; en observant de mettre en même-tems, 1° dans la seconde colonne 125 que donne la quantité proposée par cette valeur de x. 2°. Dans la troisiéme les nombres 1, 5, 25,

125 diviseurs de 125. 3°. Dans la quatriéme colonne le nombre 4 quarré de — 2 & valeur de xx dans cette supposition. 4°. Dans la cinquiéme colonne les nombres — 129, — 29, — 9, — 5 que l'on a en retranchant 4 des nombres 125, 25. 5; 1 pris en —, & les nombres — 3, + 1, + 21, + 121 que l'on a en retranchant 4 des mêmes nombres 1, 5, 25, 125 pris en +.

Par ce moyen, je vois que les deux progressions — 2, + 1, + 4, & 0, — 7, — 14 sont à rejetter, parce qu'elles devroient donner pour quatriéme terme + 7 & — 21 qui ne se trouvent pas dans la quatriéme bande. Mais les trois progressions — 2, — 1, 0; 0, — 3, — 6; 0, — 1, — 2 devant donner pour quatriémes termes, + 1, — 9, — 3 qui se trouvent dans cette quatriéme bande, j'ai besoin d'une nouvelle supposition pour exclure au moins une de ces trois progressions.

Je fais donc $x = -3$, ce qui me donne 147 pour le nombre dans lequel se change la quantité proposée par cette supposition. J'écris donc 147 dans la seconde colonne, & à côté, dans la troisiéme, ses diviseurs 1, 3, 7, 21, 49, 147, je mets de même dans la quatriéme colonne 9 quarré de — 3 ou valeur de xx dans la nouvelle supposition, enfin j'écris dans la cinquiéme colonne les nombres — 156, — 58, — 30, — 16, — 12, — 10, — 8, — 6, — 2, + 12, + 40, + 138, que l'on a en retranchant 9 des nombres 1, 3, 7, 21, 49, 147 pris en — & en +.

Par-là

Case 1.

$x^3 - 2x^2 - 13x + 6$

1	8	1. 2. 4. 8	+4	—2	:
0	6	1. 2. 3. 6	+3	—3	24. 1:
—1	16	1. 2. 4. 8. 16	+2	—4	120.60. 40.30.20.15
—2	16		+1		

$x^5 - 12x^4 + 5x^3 - 61x^2 + 22x - 120$

1	165	1.3.5.11.15.33.55.165
0	120	1.2.3.4.5.6.8.10.12.15.20.24.30.40.
—1	221	1.13.17.221

$x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 5x^2 + 11x + 36$

2	74		
1	30	1. 2. 3. 5. 6. 10. 15. 30	+
0	36	1. 2. 3. 4. 6. 9. 12. 18. 36	—
—1	40	1. 2. 4. 5. 8. 10. 20. 40	—

$x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 36x + 21$

1	1	1	1	—2, 0
0	21	1.3.7 21	0	—21.—7,—3,—1,+
—1	65	1.5.13.65	1	—66,—14,—6,—2,
—2	125	1.5.25.125	4	—129,—29,—9,—5
—3	147	1.3.7.21.49.147	9	—156,—58,—30,—16,

Par-là je trouve que les progreſſions -2, $-1, 0, +1$ & $0, -1, -2, -3$ doivent être rejettées, & qu'au contraire il faut conſerver la progreſſion $0, -3, -6, -9$, car les deux cinquiémes termes des premieres progreſſions doivent être $+2$ & -4 qui ne ſe trouvent pas dans la cinquiéme bande, au lieu que le cinquiéme terme de la progreſſion $0, -3, -6, -9$ eſt -12 qui s'y trouve.

Après avoir réduit toutes les progreſſions à la ſeule $0, -3, -6$, &c. je prends dans cette progreſſion le nombre -3 qui, dans la ſixiéme colonne, répond à la ſuppoſition de $x=0$, pour exprimer le terme c du diviſeur cherché $xx+bx+c$. Je prends enſuite, toujours dans la ſixiéme colonne, 0 qui répond à la ſuppoſition de $x=1$, & qui ſuivant les principes précédens doit être $b+c$, ainſi retranchant c ou -3 de 0 ou $b+c$, j'ai $+3$ pour b, & partant le diviſeur cherché x^2+bx+c eſt $xx+3x-3$, s'il y en a un de deux dimenſions.

Pour ſçavoir ce qui en eſt, je diviſe la quantité propoſée $x^5+3x^4+2x^3+8x^2-36x+21$ par $xx+3x-3$, & je trouve qu'en effet la diviſion eſt exacte, & donne pour quotient x^3+5x-7.

XXI.

Soit préſentement la quantité $x^4+6x^3+11x^2+10x+5$, je commence par écrire (Table ci-jointe Caſe 1) dans une premiere colonne verticale les valeurs $2, 1, 0, -1$, Autre application de la méthode précédente.

— 2 que je veux donner à x. J'écris enſuite dans la ſeconde colonne verticale les nombres 133, 33, 5, 1, 3 dans leſquels la quantité ſe change par ces ſuppoſitions.

Dans la troiſiéme j'écris vis-à-vis de ces nombres tous leurs diviſeurs. Dans la quatriéme les valeurs 4, 1, 0, 1, 4 de xx dans les ſuppoſitions faites pour x à la premiere colonne.

Enfin dans la cinquiéme colonne j'écris pour la premiere bande les nombres —137, —23, —11, —5, —3, +3, +15, +129 trouvés en retranchant 4 des nombres 133, 19, 7, 1 pris d'abord en — & enſuite en +. De même dans la ſeconde bande les nombres —34, —12, —4, —2, 0, +2, +10, +32, produits en retranchant 1 des nombres 33, 11, 3, 1 pris d'abord en — puis en +, & ainſi des autres bandes. Tous ces nombres écrits, je commence par prendre dans la cinquiéme bande de la cinquiéme colonne, le premier nombre —7 pour ſervir de premier terme d'une progreſſion, & prenant en même-tems —2 dans la quatriéme bande pour ſervir de ſecond, je vois que le troiſiéme devroit être +3, & qu'il ne ſe trouve pas dans la troiſiéme bande, ainſi je paſſe à 0 qui, en prenant toujours —7 pour premier terme, donneroit +7 pour troiſiéme terme, & comme +7 n'eſt pas non plus dans la troiſiéme, je conclus qu'il n'y a point dans les nombres de la cinquiéme colonne de progreſſion qui puiſſe commencer par —7.

Je prends donc — 5 pour premier terme,

& je vois qu'en lui donnant —2 pour second, le troisiéme seroit +1 qui se trouve bien dans la troisiéme bande, mais qui donne pour quatriéme terme +4, qui n'est pas dans la seconde bande; ainsi je laisse —2 & prends o pour second terme, ce qui me donne alors +5, +10, +15, pour troisiéme, quatriéme & cinquiéme termes, & comme tous ces nombres se trouvent dans la troisiéme, seconde & premiere bandes, j'écris dans la sixiéme colonne les nombres 15, 10, 5, 0, —5.

Prenant ensuite —3 pour premier terme, je vois que ni —2 ni o ne peuvent lui servir de seconds termes, parce que le premier donneroit la progression —3, —2, —1, 0, +1 dont le dernier terme n'est point dans la premiere bande; & que le second donneroit la progression —3, 0, +3, &c. qui manque dès le troisiéme terme +3 qui ne se trouve point dans la troisiéme bande.

Il ne me reste plus qu'à prendre —1 pour premier terme, je lui donne d'abord —2 pour second qui ne réussit pas, mais lui donnant ensuite o, j'ai pour troisiéme, quatriéme, cinquiéme termes les nombres +1, +2, +3 qui sont dans la troisiéme, seconde & premiere bande; j'écris donc dans la sixiéme colonne les nombres +3, +2, +1, 0, —1.

Cela fait, je ne cherche point à donner de nouvelles valeurs à x pour exclure une de ces deux progressions, parce que la quantité donnée étant de quatre dimensions, doit ou n'avoir aucun diviseur de deux dimensions, ou

en avoir deux à la fois, ce qui se tire de ce qu'aussi-tôt qu'on aura trouvé un diviseur de deux dimensions à une quantité qui a quatre dimensions, le quotient qui est toujours un diviseur en même-tems, aura aussi deux dimensions.

Suivant cette réfléxion, je prends indifferemment l'une ou l'autre des deux progressions précédentes, la premiere, par exemple, dans laquelle 5 étant ce qui répond à la supposition de $x = 0$, & 10 ce qui répond à la supposition de $x = 1$, j'ai $c = 5$ & $b + c = 10$, c'est-à-dire, $b = 5$. D'où le diviseur que donne cette progression est $xx + 5x + 5$. Je divise donc la quantité proposée par $xx + 5x + 5$, & je vois qu'elle réussit en donnant pour quotient $xx + x + 1$ qui est le diviseur qu'on trouveroit par l'autre progression.

XXII.

Lorsqu'il sera question de trouver les diviseurs d'une Equation telle que $6y^4 - y^3 - 21y^2 + 3y + 20 = 0$, dont le premier terme aura un coefficient qui n'aura pas pû s'en aller en divisant toute l'Equation par ce coefficient, on pourra se servir des principes précédens sans être obligé de changer cette Equation en une autre qui n'ait point de coefficient au premier terme comme on le pourroit faire par la méthode de l'art. IX.

Méthode pour trouver les diviseurs d'une dimen-

Pour le faire voir examinons d'abord ce qui regarde les diviseurs d'une dimension. Que $mx + a$ représente celui qui doit diviser une

quantité quelconque donnée. Il est clair que si on fait x successivement égal à 2, 1, 0, — 1, — 2, &c, ce diviseur deviendra dans tous ces cas $2m + a, m + a, a, - m + a, - 2m + a$, &c. qui sont des quantités en progression arithmétique, dans lesquelles il est aisé de remarquer, sion, lorsque l'x doit avoir un coefficient.

1°. Que la différence m de tous les termes est le coefficient de x dans le diviseur.

2°. Que cette même différence m est un diviseur du coefficient du premier terme de la quantité proposée.

3°. Que le terme a répondant à la supposition de $x = 0$ est la partie délivrée d'x du diviseur.

4°. Que les mêmes quantités en progression arithmétique seront des diviseurs de la quantité donnée, dans laquelle on aura fait successivement x égal à 2, 1, 0, — 1, — 2, &c.

Cela posé, lorsqu'on aura à chercher les diviseurs d'une dimension d'une quantité quelconque donnée, on suivra d'abord le même procédé que ci-dessus pour les trois premieres colonnes; on cherchera ensuite parmi tous ces nombres quelque progression, dont la différence soit un diviseur du coefficient du premier terme de la quantité proposée. Enfin, pour employer cette progression, on substituera dans $mx + a$, à la place de a le terme de la progression qui répondra à la supposition de $x = 0$, & à la place de m le nombre que l'on aura en retranchant un terme quelconque de la progression, de celui qui est au-dessus.

XXIII.

Application de cette méthode à un exemple.

Suppoſons, par exemple, que l'on cherche les diviſeurs de la quantité $6x^4 - x^3 - 21x^2 + 3x + 20$.

Je range à l'ordinaire dans la premiere colonne les ſuppoſitions 2, 1, 0, —1, —2, à faire pour x. Dans la ſeconde les nombres 30, 7, 20, 3, 34, que devient ſucceſſivement la quantité donnée par ces ſuppoſitions, & enfin dans la troiſiéme tous les diviſeurs de ces nombres.

Cela fait, afin de découvrir parmi tous les nombres de la troiſiéme colonne quelque progreſſion qui ſerve à reconnoître le diviſeur cherché, Je commence par examiner le premier nombre 1 de la premiere bande; & je vois d'abord que ſi on lui donne pour ſecond le premier nombre 1 de la ſeconde bande, la progreſſion 1, 1, 1, &c. qui en vient ne peut pas être admiſe, puiſqu'elle ne ſçauroit repréſenter le diviſeur cherché $mx + a$ qui doit varier néceſſairement par les différentes valeurs de x. Je vois de même que 7 ne ſçauroit être pris pour ſecond, car le troiſiéme terme que produiroit cette ſuppoſition ſeroit 13 qui ne ſe trouve pas dans la troiſiéme bande.

Prenant enſuite 1 en —, je vois que 1 de la ſeconde ne lui ſçauroit ſervir de ſecond terme, parce que le troiſiéme ſeroit 3 qui n'eſt pas dans la troiſiéme bande. A l'égard de 7, il eſt inutile de chercher ſi le troiſiéme terme qu'il donneroit ſe trouve dans la troiſiéme bande, puiſque la différence de — 1 à 7 eſt 8

qui n'eſt pas un diviſeur du coefficient du premier terme de la quantité propoſée ; donc 1 ſoit qu'on le prenne en + ou qu'on le prenne en — eſt à rejetter.

Parcourant de la même maniere tous les autres nombres de la premiere bande, je ne trouve que 10 qui puiſſe avoir les conditions convenables. Lui donnant 7 pour ſecond terme, il donne la progreſſion 10, 7, 4, 1, —2 dont la différence eſt 3 diviſeur du coefficient de $6x^3$.

Ayant donc écrit cette progreſſion dans la quatriéme colonne, je prend le terme +4 qui répond à la ſuppoſition de $x=0$ pour exprimer la partie a du diviſeur cherché, & retranchant le même terme +4 du terme ſupérieur +7 qui repréſente $m+a$, j'ai +3 pour exprimer m, c'eſt-à-dire que le diviſeur cherché, s'il doit y en avoir un, ne peut être que $3x+4$. Jé tente donc la diviſion par cette quantité, elle réuſſit, & me donne pour quotient $2x^3 - 3x^2 - 3x + 5$.

XXIV.

Examinons préſentement les cas où les diviſeurs doivent avoir deux dimenſions. Soit pris mx^2+bx+c pour repréſenter le diviſeur cherché d'une quantité donnée, il eſt clair comme ci-deſſus que le dernier terme c ſera un diviſeur du dernier terme de la quantité donnée, & que m ſera un diviſeur du coefficient de la plus haute puiſſance de x dans la quantité donnée.

Méthode pour trouver les diviſeurs des deux dimenſions, lorſque l'x doit avoir un coefficient.

Choiſiſſant donc d'abord pour repréſenter m un des diviſeurs du coefficient du premier terme de la quantité donnée, & faiſant la mê-

me opération que dans l'art XIX. à cela près; qu'au lieu de retrancher les quarrés 16, 9, 4, &c. on retranche le produit de ces mêmes quarrés par le nombre qu'on aura choisi pour m, on trouvera de même b & c.

Si le diviseur que l'on a ainsi en mettant dans mx^2+bx+c, pour m le nombre choisi, & pour b, c ceux qui auront été déterminés d'après ce choix, ne réussit pas, on prendra un autre des diviseurs du coefficient du premier terme de la quantité donnée pour représenter m, & l'on achevera le calcul de la même maniere. Si après avoir essayé tous les diviseurs du coefficient du premier terme, il arrivoit qu'on ne trouvât pas de diviseur par cette méthode, on seroit sûr que la quantité proposée n'en devoit point avoir.

XXV.

Application de cette méthode à un Exemple.

Soit pris, pour faire une application de cette méthode la quantité $4x^5+16x^4-22x^3-14x^2-56x+77$ dont on demande un diviseur de deux dimensions. Ayant d'abord placé à l'ordinaire (Table suivante Case 3) dans la premiere colonne les nombres 2, 1, 0, −1, −2, &c. auxquels on égale successivement x; dans la seconde les nombres 117, 5, 77, 153, 437 que devient successivement la quantité proposée par ces valeurs de x; dans la troisiéme tous les diviseurs des nombres de la seconde : je commence par chercher suivant les regles de l'art. XIX. s'il y a quelque diviseur de deux dimensions, dont le premier terme ait

l'unité pour coefficient ; mais n'en trouvant point, Je suppose que m, c'est-à-dire le coefficient du premier terme du diviseur, soit 2 qui est un des diviseurs du coefficient 4 du premier terme de la quantité donnée.

Je place alors dans la quatriéme colonne, au lieu des quarrés des nombres de la premiere, le produit de ces mêmes quarrés par 2 valeur supposée de m, c'est-à dire que j'ecris dans la quatriéme colonne les nombres 8, 2, 0, 2, 8. Je retranche ensuite ces nombres de tous ceux de la troisiéme colonne pris en — & en +, ce qui me donne pour la premiere bande de la cinquiéme colonne -125, -47, -21, -17, -11, -9, -7, -5, $+1$, $+5$, $+31$, $+109$; pour la seconde bande -7, -3, &c.

Tous ces nombres écrits, je cherche toujours comme ci-devant des progressions arithmétiques parmi tous ces termes, & je ne trouve que la progression $+5$, -3, -11, -19, -27 que j'écris dans la sixiéme colonne ; cela fait, je prends -11 répondant à zero pour exprimer le nombre c, & retranchant ce nombre de -3 qui est au-dessus, j'ai le reste $+8$ pour exprimer b. Le diviseur qui résulte donc de la supposition de $m=2$ est $2x^2+8x-11$, j'essaye alors la division qui réussit en donnant pour quotient $2x^3-7$, & sans prendre la peine de faire le calcul que demanderoit la supposition de $m=4$, je vois qu'il ne doit pas réussir, parce qu'il faudroit pour cela que le quotient $2x^3-7$ pût se

décompoſer, ce qui eſt impoſſible. Ainſi la la quantité propoſée n'a pas d'autre diviſeur de deux dimenſions que $2x^2+8x-11$.

XXVI.

Toute quantité de moins de ſix dimenſions, & qui a des diviſeurs, en doit avoir d'audeſſous de trois dimenſions.

Lorſqu'on cherchera les diviſeurs d'une quantité qui ne paſſera pas le cinquiéme dégré, on pourra toujours les trouver par les méthodes précédentes; car auſſi-tôt qu'on ſe ſera aſſuré par ces méthodes que cette quantité n'aura point de diviſeur, ni d'une, ni de deux dimenſions, on ſera ſur auſſi qu'elle n'en aura pas de trois.

XXVII.

Si la quantité a ſix ou plus de dimenſions, elle pourroit n'avoir de diviſeurs que de trois ou de plus de dimenſions.

Mais ſi la quantité monte à ſix & à plus de dimenſions, elle pourroit n'être décompoſable qu'en des quantités de plus de deux dimenſions. La méthode qu'il faudroit ſuivre pour trouver ces diviſeurs eſt fondée à peu près ſur les mêmes principes que les précédens, je ne m'arrête point à l'expliquer à cauſe de la longueur des calculs.

XXVIII.

Tout ce que nous venons de dire concernant les diviſeurs commenſurables ne regarde que les Equations numériques, cependant les Equations littérales pouvant auſſi avoir des diviſeurs commenſurables, il faut voir ce que l'on doit faire pour les trouver.

Suppoſons d'abord que l'Equation ne renferme qu'une lettre connue avec l'x, & que cette Equation, ſoit ce qu'on appelle homogene, c'eſt-à-dire que tous ſes termes montent à la même dimenſion, telle que l'Equation

$x^4 -$

2	133	1.[illegible]
1	33	1.[illegible]
0	5	1.[illegible]
—1	1	1
—2	3	1.[illegible]

2
1
0
—1
—2

$4x^5 + 16x$

2	117
1	5
0	77
—1	153
—2	437

$x^3 - ax^2 - 10a^2x + 6a^3$, par exemple, on n'aura qu'à ſubſtituer l'unité à la place de la lettre connue a de cette Equation, & chercher ſes diviſeurs de la même maniere que ci-deſſus. Ces diviſeurs étant trouvés, s'ils ſont d'une dimenſion, on remettra la lettre a à côté du nombre qui ſert de ſecond terme Si le diviſeur a deux dimenſions, on placera a après le coefficient du ſecond terme, & aa après le nombre qui ſert de troiſiéme terme.

Soit, par exemple, la quantité $x^3 + 4ax^2 - 17a^2x - 12a^3$, après avoir fait $a = 1$, & trouvé que la quantité $x^3 + 4x^2 - 17x - 12$, qui vient par cette opération, a pour diviſeur $x - 3$, je conclus que $x - 3a$ eſt un diviſeur de la quantité propoſée.

Qu'on ait enſuite $2x^5 + 5ax^4 - 3a^2x^3 - 8a^3x^2 - 20a^4x + 12a^5$. En ſuppoſant $a = 1$, on aura $2x^5 + 5x^4 - 3x^3 - 8x^2 - 20x + 12$ qui donne pour diviſeur de deux dimenſions $2x^2 + 5x - 3$. Mettant alors dans ce diviſeur a à côté de 5, & aa à côté de 3, il vient $2x^2 + 5ax - 3aa$ pour le diviſeur de deux dimenſions de $2x^5 + 5ax^4 - 3aax^3 - 8a^3x^2 - 20a\,x + 12a^5$.

XXIX.

Dans une Equation homogene & renfermant trois lettres, on pourroit, en ſuivant les méthodes précédentes, parvenir encore à trouver ſes diviſeurs, tant ſimples que compoſées de deux dimenſions; mais à l'aide de quelques obſervations de calcul qui ſe préſentent aſſez

naturellement, on peut réussir d'une façon un peu plus commode.

Méthode pour trouver tous les diviseurs à deux lettres dans une quantité qui en a trois

Supposons d'abord que la quantité donnée qui renferme trois lettres, a, b, x dut avoir pour diviseur une quantité qui n'en renfermât que deux, que les lettres x, & a, par exemple : puisque ce diviseur quel qu'il soit pourra sans contenir de b, diviser la quantité donnée ou b entre, il faut que la valeur de b soit indifférente à la division, & que cette division puisse se faire de même lorsque b sera zero, donc si on fait $b=0$ dans la quantité donnée, il faudra que la quantité donnée par cette supposition ait pour commun diviseur avec la quantité entiere, le diviseur cherché. La question est donc en ce cas renfermée dans une autre traitée dans la premiere Partie, art. LXXIII. où l'on a enseigné à trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités données: de sorte que par ce qu'on a enseigné dans cet article, on trouvera le diviseur cherché de quelque dimension qu'il soit, pourvû qu'il n'ait que deux lettres.

XXX.

Exemple.

Pour montrer l'application de cette méthode, soit pris d'abord la quantité $x^4 + ax^3 + 2a^2x^2 + 3a^3x + abbx + a^4 + aabb$, dont on cherche un diviseur où les seules lettres a, x entrent.

En faisant $b=0$ il vient $x^4 + ax^3 + 2a^2x^2 + 3a^3x + a^4$ dont le plus grand commun diviseur avec la quantité entiere, ou, ce qui

revient au même, avec le reste $abbx + aabb$, est $x + a$, qui est donc nécessairement un diviseur de la quantité donnée, & le plus grand qu'elle puisse avoir qui ne contienne pas de b.

XXXI.

Autre exemple.

Soit $x^5 - 4ax^4 + 6aax^3 - abx^3 + abbx^2 + 2aabx^2 - 4a^3x^2 - 2aabbx - 2a^3bx + 2a^3bb$; en faisant $b = 0$ dans cette quantité on a $x^5 - 4ax^4 + 6aax^3 - 4a^3x^2$ dont il faut chercher le plus grand commun diviseur avec la quantité proposée, ou ce qui revient au même, avec le reste $-abx^3 + abbx^2 + 2aabx^2 - 2aabbx - 2a^3bx + 2a^3bb$, c'est-à-dire le plus grand commun diviseur des quantités $x^3 - 4ax^2 + 6aax - 4a^3$ & $-x^3 + bx^2 + 2ax^2 - 2abx - 2aax + 2aab$.

Or s'il y a un diviseur commun entre ces deux quantités qui ne contienne pas de b, il sera aussi commun aux deux parties $-x^3 + 2ax^2 - 2a^2x$ & $bx^2 - 2abx + 2a^2b$ de la derniere de ces deux quantités; mais le diviseur commun de ces deux parties ne peut être que $xx - 2ax + 2a^2$, j'examine donc s'il divise aussi $x^3 - 4ax^2 + 6aax - 4a^3$ & comme il le divise en effet, je conclus qu'il est le diviseur cherché de la quantité proposée.

XXXII.

Méthode pour trouver les diviseurs de trois let-

Supposons présentement que la quantité proposée composée de trois lettres dont on cherche les diviseurs n'en ait aucun composé seu-

tres & d'une dimension. lement de deux lettres, ou bien que si elle en renferme, on ait commencé par les trouver, & les mettre à part ; pour trouver alors les diviseurs de trois lettres & d'une dimension qu'elle peut avoir, je commence par représenter ce diviseur par $mx + na + pb$; m, n, p étant supposées désigner des nombres. Je remarque ensuite que si on fait successivement, a, x, b égaux à zero dans ce diviseur, on a les trois quantités $mx + pb$, $na + pb$, $mx + na$ telles que les deux termes que chacune d'elles renferme se trouvent répetés dans les deux autres quantités ; $mx + pb$ par exemple donné par la supposition de $a = 0$, est composé de mx qui se trouve dans $mx + na$ donné par la supposition de $b = 0$, & de pb qui se trouve dans $na + pb$ donné par la supposition de $x = 0$. Je vois en même-tems que la somme de ces trois quantités $mx + na, mx + pb, na + pb$, est le double du diviseur entier $mx + na + pb$.

Or comme ces trois quantités sont nécessairement des diviseurs de celles que l'on auroit en faisant les mêmes suppositions de a, x, b égaux à zero, dans la quantité proposée ; on tire de là, que pour trouver les diviseurs de cette quantité qui ne montent qu'à une dimension, & contiennent trois lettres, il faut commencer par écrire séparément les trois quantités, dans lesquelles la proposée se change par la supposition de a, x, b égaux à zero ; écrire ensuite a côté de chacune de ces nouvelles quantités tous ses diviseurs d'une di-

menſion & à deux lettres. Cela fait, il faut choiſir trois diviſeurs parmi ces trois claſſes de diviſeurs à deux lettres, en obſervant les conditions dont nous venons de parler, que les deux termes dont chacun de ces diviſeurs ſera compoſé ſe retrouvent dans les deux autres diviſeurs. Ces trois diviſeurs étant ainſi trouvés, la moitié de leur ſomme ſera le diviſeur de la quantité propoſée ſi elle en a un.

Si pour trouver dans un de ces trois diviſeurs de deux lettres les deux termes qui doivent être la répétition de ceux qui ſont dans les deux autres, il falloit en changer les deux ſignes à la fois, on voit bien que ce changement ſeroit permis, puiſqu'en général une quantité qui en diviſe une autre la diviſera encore, ſi on en change tous les ſignes.

XXXIII.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Pour montrer l'application de cette méthode, ſoit propoſée la quantité $2x^3 + 7ax^2 - 3bx^2 + 5a^2x - 3abx + 4b^2x + 10abb - 6b^3$. Ayant d'abord écrit (voyez la Table ci-jointe Caſe 1) dans une colonne verticale les trois quantités $10ab^2 - 6b^3$; $2x^3 - 3bx^2 + 4bbx - 6b^3$; $2x^3 + 7ax^2 + 5a^2x$ dans leſquelles cette quantité ſe change par la ſuppoſition de x, a, b égaux à zero; j'écris dans une ſeconde colonne verticale vis-à-vis de chacune de ces trois quantités leurs diviſeurs à deux lettres & d'une ſeule dimenſion. La premiere fournit $5a - 3b$ & $10 - 6b$; la ſeconde ſeulement $2x - 3b$, & la troiſiéme

$2x+5a$. Cela fait, je vois tout de ſuite que ſi on prend des deux diviſeurs, $5a-3b$, $10a-6$, le premier $5a-3b$; il aura, avec les deux diviſeurs $2x-3b$, $2x+5a$, la proprié é requi e, car ce premier diviſeur $5a-3b$ contient $5a$ qui eſt répété dans le diviſeur $2x+5a$, & $-3b$ qui eſt répeté dans $2x-3b$; de même $2x-3b$ contient $2x$ qui eſt répeté dans $2x+5a$, & $-3b$ qui eſt répeté dans $5a-3b$; & enfin $2x+5a$ eſt compoſé de $2x$ & de $+5a$, qui ſont répetés dans les deux autres $5a-3b$, $2x-3b$.

J'ajoute donc ſuivant la regle précédente ces trois diviſeurs, & j'ai $4x-6b+10a$, dont la moitié $2x-3b+5a$ eſt le diviſeur cherché. En effet, ſi on tente la diviſion, on trouve pour quotient $x^2+ax+2bb$.

XXXIV.

Autre exemple.

Soit propoſé préſentement de trouver les diviſeurs d'une dimenſion & à trois lettres de la quantité $8x^4-2ax^3-10bx^3-3a^2x^2-5abx^2-12ab^2x+9a^2b^2+15ab^3$. Ayant fait ſucceſſivement x, a, b égaux a zero dans cette quantité, j'ai les trois quantités $9a^2b^2+15ab^3$, $8x^4-10bx^3$, $8x^4-2ax^3-3a^2x^2$ que j'écris (voyez la Caſe ſeconde de la Table ci-jointe) l'une ſous l'autre dans une colonne verticale. J'écris dans une autre colonne verticale à côté de chacune de ces quantités leurs diviſeurs d'une dimenſion & à deux lettres; ceux de la premiere ſont $3a+5b$ & $9a+15b$; ceux de la ſeconde

$4x$

$4x - 5b$, $8x - 10b$; & ceux de la troisiéme $4x - 3a$ & $2x + a$.

Il n'eſt pas difficile enſuite de trouver que les trois diviſeurs $3a + 5b$, $4x - 5b$, & $4x - 3a$ ont les propriétés requiſes pourvû qu'on prenne le premier $3a + 5b$ en changeant ſes ſignes, c'eſt-à-dire en l'écrivant ainſi $-3a - 5b$; je mets donc à part ces trois diviſeurs dans la quatriéme colonne, je les ajoute, & prends la moitié de la ſomme, ce qui me donne $4x - 3a - 5b$ pour le ſeul diviſeur cherché, ſuppoſé qu'il y en ait un. Je tente la diviſion, & je trouve pour quotient exact $2x^3 + ax^2 - 3ab^2$.

XXXV.

Dans ces deux exemples nous n'avons point écrit les diviſeurs d'une lettre que donnoient chacune des trois quantités de la premiere colonne, parce que ces diviſeurs n'auroient jamais pû être les quantités dans leſquelles le diviſeur à trois lettres ſe change par la ſuppoſition de x, a, b égaux à zero, & que nous avons ſuppoſé qu'on s'étoit aſſuré par la méthode de l'article XXIX. que la quantité propoſée n'avoit pas de diviſeur à deux lettres. Mais ſi on avoit des quantités qui euſſent de ces ſortes de diviſeurs, & qu'on ne voulut pas ſe ſervir de la méthode de l'art. XXIX. on pourroit les trouver en même-tems que ceux à trois lettres par la même méthode que nous venons d'expliquer, pourvû que ces diviſeurs n'euſſent non plus qu'une dimenſion.

Troisiéme exemple où l'on trouve les diviseurs à deux lettres en même-tems que ceux à trois.

Soit par exemple la quantité $16x^3+16bxx-48axx+35aax-16abx-6a^3+3a^2b$. Ayant écrit dans une premiere colonne (voyez la Case 5 de la Table ci-jointe) les trois quantités $-6a^3+3a^2b$, $16x^3+16bxx$, $16x^3-48axx+35a^2x-6a^3$, dans lesquelles cette quantité se change par la supposition de x, a, b égaux à zero. J'écris dans la seconde colonne, & à la premiere bande, a, $3a$, $-2a+b$, $-6a+3b$ diviseurs d'une dimension & à une ou deux lettres de la quantité $-6a^3+3a^2b$. De même dans la seconde bande, j'écris les diviseurs x, $2x$, $4x$, $8x$, $16x$; $x+b$, $2x+2b$, $4x+4b$, $8x+8b$, $16x+16b$, de la seconde quantité $16x^3+16bxx$: & dans la troisiéme bande, $a-4x$, $3a-4x$, $x-2a$ diviseurs de la troisiéme quantité $16x^3-48axx+35a^2x-6a^3$.

Cela fait, à cause du grand nombre de ces diviseurs, il faut plus d'attention que dans les exemples précédens pour n'en laisser aucun qui puisse avoir les conditions requises ; & l'ordre qu'on doit suivre est à peu près le même que celui qu'on a suivi dans les diviseurs numériques. Il faut d'abord comparer le premier de la premiere bande avec tous ceux des autres bandes, & faire ensuite la même opération pour chacun des autres diviseurs de la premiere bande. Je vois d'abord que si a fait partie d'un diviseur de la quantité, ce ne peut être que d'un diviseur qui ne contienne que a & x parce que s'il y avoit un terme qui contint b, ce diviseur ne se seroit pas réduit à a par la sup-

position de $x=0$. Ainsi je n'ai à choisir dans ce cas que parmi les cinq premiers diviseurs x, $2x$, $4x$, $8x$, $16x$, & comme de tous ces diviseurs il n'y a que $4x$ qui soit répété dans la troisiéme, en supposant que ce diviseur $4x$ soit affecté du signe $-$; & qu'en même-tems de tous les diviseurs de la troisiéme bande, il n'y a que le premier $a-4x$ qui renferme le même terme a de la premiere bande, je conclus que si a fait partie d'un diviseur, il faut que ce diviseur soit $a-4x$, je l'écris donc à part. Je passe après à $3a$, & comme je le trouve répété dans le diviseur $3a-4x$ de la troisiéme bande, & que l'autre terme $4x$ du même diviseur se trouve être un des diviseurs de la seconde bande en changeant le signe de ce diviseur, je conclus que $3a-4x$ peut-être encore un diviseur de la quantité proposée, & je le mets à part afin de l'essayer.

Quant à $-2a+b$ on voit d'abord qu'il ne peut pas seul être un diviseur de la quantité proposée, parce qu'il faudroit pour cela que parmi les diviseurs de $16x^3+16bxx$, on eut le terme b que deviendroit $-2a+b$ par la supposition de $a=0$, reste donc à sçavoir s'il ne feroit pas partie d'un diviseur où x entreroit; pour m'en assurer, je commence par remarquer que de tous les diviseurs de la seconde bande il n'y a que $x+b$ avec lequel on puisse le comparer à cause qu'il n'y a que ce seul diviseur qui ait le terme $+b$ de commun avec lui. Je vois aussi qu'il n'y a que $x-2a$ de la troisiéme bande avec lequel je

puisse comparer le même diviseur $-2a+b$, parce qu'il n'y a que lui qui contienne le terme $-2a$. Je vois ensuite que de même que les deux termes du diviseur $-2a+b$ sont répétés dans les deux autres diviseurs $x+b$, $x-2a$, le diviseur $x+b$ a aussi ses deux termes répétés dans les deux autres $-2a+b$, $x-2a$, & réciproquement que les deux termes du diviseur $x-2a$ sont répétés dans les deux autres $x+b$, $-2a+b$. De-là je conclus que les trois diviseurs $-2a+b$, $x+b$, $x-2a$ ont les conditions nécessaires pour former un diviseur. Je les ajoute donc, & je mets à part la moitié $x-2a+b$ de leur somme pour un diviseur à tenter. Mais avant d'en faire le calcul j'examine ce que peut me donner le diviseur $-6a+3b$, je vois tout de suite qu'il n'y a aucun de ses deux termes qui soit répété parmi les diviseurs des autres bandes, & qu'ainsi il faut le rejetter.

Par cet examen on trouve donc les trois diviseurs $a-4x$, $3a-4x$, $x-2a+b$ à essayer, je tente la division par le dernier, elle réussit, & ne donne pour quotient $3aa-16ax+16xx$, que je divise ensuite par $3a-4x$, & la division réussit encore, & me donne pour quotient le premier diviseur $a-4x$. Ainsi la quantité proposée étoit le produit de ces trois diviseurs.

XXXVI.

Méthode pour trouver les diviseurs de deux di-

Si la quantité proposée n'a point de diviseur d'une dimension, & qu'on veuille examiner si elle n'en a point de deux, on y par-

$x-$

$10ab$
$2x^3-$
$2x^3-$

$8x^4-$

$9a^2b^2$
$8x^4-$
$8x^4-$

$16x^3+16$

$-6a^3+3a^2b$
$16a^3+16bb$
$16x^3-48a$

a	$3a$	$-2a+b$
$-4x$	$-4x$	$x+b$
$a-4x$	$3a-4x$	$x-2a$
$a-4x$	$3a-4x$	$x-2a+b$

menſions & à trois lettres.

viendra aſſez facilement à l'aide de quelques obſervations analogues à celles ſur leſquelles eſt fondée la méthode précédente. Soit pris $mxx + nax + pbx + qa^2 + rab + sbb$ pour repréſenter le diviſeur cherché à deux dimenſions; faiſant ſucceſſivement $x = 0$, $a = 0$, $b = 0$ dans cette quantité j'ai les trois quantités.

$$qa^2 + rab + sbb$$
$$mx^2 + pbx + sbb$$
$$mx^2 + nax + qa^2$$

qui ſont toutes trois des diviſeurs de ce que devient la quantité propoſée lorſqu'on y a fait ſucceſſivement les mêmes ſuppoſitions de x, a, b égaux a zero. De plus chacun de ces diviſeurs eſt toujours tel, que les termes affectés de lettres quarrées ſont toujours répétés dans les deux autres diviſeurs, tandis que les termes qui contiennent un produit de deux lettres ſont toujours les ſeuls de leur eſpece. Voilà donc des conditions pour examiner les trois claſſes de diviſeurs de deux lettres & de deux dimenſions qu'on tirera d'une quantité propoſée, ainſi quand on en aura trouvé trois qui rempliront ces conditions, on n'aura qu'à les ajouter, prendre enſuite la moitié de tous les termes affectés de quarrés, & laiſſer en entier ceux qui ne ſeront que des rectangles.

XXXVII.

Application de cette méthode à un exemple.

Pour montrer l'application de cette méthode ſoit la quantité $x^5 - 4ax^4 - 5a^2x^3 + 4b^2x^3 - a^3x^2 - 14ab^2x^2 + 3b^4x - a^4x - 3ab^2$, laquelle n'a aucun diviſeur d'une ſeule dimenſion, & dont on cherche quelque diviſeur qui en ait deux.

On commencera par garder (voyez la premiere Case de la Table ci-jointe) les trois quantités $-3a^3b^2$, $x^5+4b^2x^3+3b^4x$; $x^5-4ax^4-5a^2x^3-a^3x^2-a^4x$ qu'on n'aura pas manqué de tirer de cette quantité, en faisant successivement x, a, b égaux à zero, lorsqu'on aura voulu s'assurer qu'elle n'avoit point de diviseurs d'une dimension. On mettra ensuite à côté de ces quantités leurs diviseurs de deux dimensions ; la premiere fournissant a^2, ab, b^2 $3a^2$, $3ab$, $3bb$; la seconde x^2+3b^2, x^2+b^2; la troisiéme seulement x^2+ax. Dans cette méthode on ne sçauroit rejetter les diviseurs qui n'ont qu'un terme, quand même on se seroit assuré que la quantité proposée n'a aucun diviseur à deux lettres, parce qu'un diviseur à trois lettres & de deux dimensions peut se réduire à un seul terme par la supposition de l'une des lettres égale à zero.

Il s'agit présentement d'examiner tous les diviseurs de la premiere bande, je vois d'abord que le premier a^2 est à rejetter, parce que ce quarré ne se trouve point répété dans les autres bandes, je passe ensuite à ab, & de ce que ce diviseur ne contient aucun terme affecté de aa & de bb, je conclus que le diviseur dont il pourroit faire partie ne peut avoir outre ce terme que des xx, des ax, & des bx, & comme cette raison exclut la comparaison qu'on pourroit faire de ab avec les diviseurs x^2+3b^2, x^2+b^2, il s'ensuit que si ab doit faire partie d'un diviseur de la proposée, ce diviseur ne peut être que $xx+ax+ba$;

mais je vois en même-tems que $xx+ax+ba$ ne sçauroit être un diviseur de la proposée, puisqu'il deviendroit seulement xx par la supposition de $a=0$, & que xx n'est point un des diviseurs de la seconde bande. Donc le diviseur ab est encore à rejetter.

Quand au diviseur bb, je le trouve répété dans le diviseur x^2+b^2 de la seconde bande, & trouvant que le même diviseur x^2+b^2, a x^2 de commun avec le diviseur de la troisiéme bande, je conclus que x^2+b^2+ax a les conditions requises pour tenter la division. Mais avant de l'entreprendre je passe aux autres diviseurs de la premiere bande, & je vois dabord que $3aa$, & $3ab$ sont à rejetter par la même raison que a^2 & ab; je vois ensuite que $3bb$ étant répété dans le diviseur x^2+3b^2 & x^2 dans $xx+ax$, il s'ensuit que $xx+3bb+ax$ a aussi les conditions requises pour tenter la division; j'essaye alors ces deux divisions, & je trouve que la seconde seule réussit en donnant pour quotient $x^3-5ax^2+b^2x-a^3$.

Au lieu de parcourir tous les diviseurs de la premiere bande, on auroit pû examiner le seul que la derniere bande contient, & trouver bien plûtôt que x^2+ax+b^2 & $x^2+ax+3b^2$ étoient les seuls diviseurs à tenter. Car il suffisoit alors de remarquer que le diviseur x^2+ax contenant x^2 qui est répété dans x^2+3b^2 & x^2+b^2, & que ces deux derniers contenant l'un $3b^2$ & l'autre b^2 qui sont chacun dans les diviseurs de la premiere bande, il s'ensuit que x^2+ax+b^2 & $x^2+ax+3b^2$

ont les conditions requiſes & qu'ils ſont les ſeuls, puiſque s'il y en avoit d'autres, ou bien ils auroient donné d'autres quantités que $xx+ax$ par la ſuppoſition de $b=0$, ou bien d'autres quantités que x^2+3b^2 & x^2+b^2 par la ſuppoſition de $a=0$.

XXXVIII.

Autre exemple.

Qu'on ait préſentement à chercher les diviſeurs de la quantité $2x^5+3ax^4+b^2x^3-a^2x+4ab^2x^2+6a^2b^2x+2ab^4-2a^3b^2$, ſoit d'une dimenſion, ſoit de deux, ſoit à deux lettres, ſoit à trois.

$2ab^4-2a^3b^2$, $2x^5+b^2x^3$, & $2x^5+3ax^4-a^2x^3$ étant les quantités que donne, dans la propoſée, la ſuppoſition de x, a, b égaux à zero, il s'agit de ranger d'abord vis-à-vis de chacune de ces quantités tous les diviſeurs qu'elles peuvent avoir tant d'une dimenſion que de deux ; comme la premiere de ces trois quantités en a un aſſez grand nombre, il faut, dans la crainte d'en omettre quelqu'un, les chercher tous avec le même ordre que nous avons ſuivi pour les diviſeurs numériques.

Application de la méthode donnée Art. XIV. pour trouver tous les diviſeurs d'un nombre, aux quantités littérales.

Ayant écrit (voyez la premiere Caſe de la Table ci-jointe) cette premiere quantité $2ab^4-2a^3bb$ à part avec une barre à ſa gauche, & à gauche de cette barre l'unité comme premier diviſeur de la quantité, je poſe 2 audeſſous de 1, parce que c'eſt après 1 le diviſeur le plus ſimple que puiſſe avoir cette quantité, & j'écris à droite de la même barre ab^4-a^3bb; je diviſe enſuite cette quantité par a, & j'écris a à gauche de la barre, en mettant en même-

tems à droite le quotient $b^4 - a^2b^2$, je multiplie alors a par 2, ce qui me donne $2a$ que j'écris à gauche de l'a comme un nouveau diviſeur de la quantité, puis je diviſe $b^4 - a^2b^2$, par b, & j'écris le diviſeur b à gauche, & le quotient $b^3 - a^2b$ à droite; enfin je multiplie b par 2, par a, par $2a$; & je mets à gauche de b, les produits, $2b$, ab, $2ab$ comme de nouveaux diviſeurs de la quantité.

La quantité étant réduite à $b^3 - a^2b$, je la diviſe encore par b que j'écris toujours à gauche, ainſi que le quotient $bb - aa$ à droite; je ne multiplie point enſuite b par 2, ni par a, ni par $2a$, parce que cela donneroit des diviſeurs que j'ai déja eu; mais je le multiplie par b & par $2b$, ce qui me donne les nouveaux diviſeurs de deux dimenſions bb & $2bb$; ſi j'en voulois admettre de trois dimenſions, ainſi que cela peut être néceſſaire dans d'autres occaſions, je multiplierois outre cela b par ab & $2ab$.

Après avoir réduit la quantité à $bb - aa$, je vois qu'elle eſt diviſible par $b - a$, & que le quotient eſt $b + a$, j'écris donc l'un à gauche & l'autre à droite, & je multiplie $b - a$ par 2, par a, par b, par $2a$, & par $2b$, ce qui me donne pour nouveaux diviſeurs d'une & de deux dimenſions, $2b - 2a$, $ba - aa$, $bb - ab$, $2ba - 2aa$, $2bb - 2ab$. Si j'en avois voulu de trois & de quatre dimenſions, j'aurois outre cela multiplié $b - a$ par ab, $2ab$, abb, $2abb$. $b + a$ n'ayant plus enſuite d'autre diviſeur que lui-même, je l'écris à gauche, & je le multi-

plie par 2, par a, par b, par $2b$, $2a$, $b-a$, $2b-2a$, ce qui me donne les nouveaux diviſeurs d'une & de deux dimenſions, $2b+2a$, $ba+aa$, $2ba+2aa$, $bb+ab$, $2bb+2ab$, $bb-aa$, $2bb-2aa$. Si j'en avois voulu admettre de trois, quatre & cinq dimenſions, c'eſt-à-dire tous les diviſeurs que la quantité propoſée pouvoit avoir, j'aurois multiplié outre cela $b+a$ par ab, $2ab$, bb, $2bb$, abb, $2abb$, $ba-aa$, $2ba-2aa$, $bb-ab$, $2bb-2ab$, $abb-aab$, $2abb-2a^2b$, b^3-ab^2, $2b^3-2ab^2$, $ab^3-a^2b^2$, $2ab^3-2a^2b^2$.

Cela fait, j'écris (voyez la troiſiéme Caſe de la Table ci-jointe) tous les diviſeurs d'une & de deux dimenſions a, $2a$, b, $2b$, $b-a$, $2b-2a$, $b+a$, $2b+2a$, ab, $2ab$, $ab-aa$, $2ba-2aa$, $bb-ab$, $2bb-2ab$, $ba+aa$, $2ba+2aa$, $bb+ba$, $2bb+2ab$ à côté de la quantité $2ab^4-2a^3b^2$ qui les a donnés. J'écris enſuite à côté de la quantité $2x^5+b^2x^3$ les diviſeurs d'une & de deux dimenſions x, x^2, $2xx+bb$, & à côté de la quantité $2x^5+3ax^4-a^2x^3$ ſes diviſeurs d'une & de deux dimenſions x, x^2, $2xx+3ax-aa$.

Parcourant après tous ces diviſeurs pour ſçavoir ceux qui peuvent être admis, je trouve bien-tôt qu'il n'y en a aucun d'une ſeule dimenſion, car ne trouvant que x dans la ſeconde & la troiſiéme bande qui ſoit d'une dimenſion, je conclus qu'il doit être le ſeul diviſeur d'une dimenſion s'il y en peut avoir, puiſque ſi le diviſeur d'une dimenſion renfermoit ou un terme affecté de a ou un affecté

de b, celui qui auroit été affecté de a seroit resté dans les diviseurs donnés par la supposition de $b=0$, & que celui qui auroit été affecté de b seroit resté dans les diviseurs donnés par la supposition de $a=0$. Mais x n'est point un diviseur de la quantité proposée, donc il n'y en a point d'une dimension. Je viens ensuite aux diviseurs de deux dimensions, & je commence par x^2 que je prends dans la troisiéme bande; trouvant qu'il est aussi dans la seconde bande, je conclus que s'il fait partie d'un diviseur, il ne peut lui manquer qu'un terme affecté du rectangle ab, parce que s'il y en avoit eu qui fussent affectés de aa, de bb, de ax, ou de bx, ceux qui auroient été affectés de bb ou de bx ne s'en seroient pas allés par la supposition de $a=0$, & ceux qui auroient été affectés de aa ou de ax n'auroient pas disparu par la supposition de $b=0$. Mais je trouve dans la premiere bande ab & $2ab$, donc $xx+ab$, $xx+2ab$, $xx-ab$, $xx-2ab$, sont des diviseurs à tenter.

Je passe ensuite au diviseur $2x^2+3ax-aa$, & je trouve le terme $2x^2$ répété audessus dans le diviseur $2xx+bb$, je trouve en même-tems le terme $-aa$ répété en haut dans plusieurs diviseurs, mais de tous les diviseurs où il est répété, il n'y a que $bb-aa$ qui ait en même-tems le terme bb que contient le diviseur $2xx+bb$, ainsi ce n'est qu'avec $2xx+bb$ & $bb-aa$ que $2x^2+3ax-aa$ peut concourir à former un diviseur qui ait les conditions requises, & ce diviseur qui est $2x^2+3ax$

$- aa + bb$, est par conséquent à tenter, & je vois qu'il n'y en a plus d'autre à chercher, parce que s'il pouvoit y en avoir un qui n'eut pas été déterminé dans l'examen qu'on vient de faire des diviseurs & de la troisiéme bande, il faudroit que ce fut un seul terme affecté de ab; or on voit tout de suite que la quantité n'a point de diviseur de cette nature.

Je tente alors la division par $2xx + 3ax - aa + bb$, elle réussit, & me donne pour quotient $x^3 + 2abb$ qui m'apprend qu'aucune des quantités $xx + ab$, $xx - ab$, $xx + 2ab$, $xx - 2ab$, ne peut diviser la proposée.

XXXIX.

Si la quantité proposée avoit plus de cinq dimensions, & qu'après s'être assuré qu'elle n'a aucun diviseur, ni d'une ni de deux dimensions, on voulut chercher ceux du troisiéme, quatriéme, &c. dégré qu'elle pourroit avoir, on suivroit pour cela une méthode analogue à celles qu'on vient d'expliquer, & qu'il est assez aisé d'imaginer.

Si la quantité dont on cherche les diviseurs renfermoit plus de trois lettres, la méthode qu'il faudroit suivre pour les trouver feroit à très peu de chose près la même que lorsqu'il n'y en a que trois, ainsi nous laisserons les Commençans s'y exercer.

XL.

Ce qu'il faut faire pour ouver les

Lorsqu'on aura une quantité dont tous les termes ne seront pas homogenes, c'est-à-dire

$x^5 - 4ax^4 - 5a^2x^3 + 4b^2x^3 - a^3x^2 -$

$- 3a^3b^2$	a^3, a
$x^5 + 4b^2x^3 + 3b^4x$	$x^2 +$
$x^5 - 4ax^4 - 5a^2x^3 - a^3x^2 - a^4x$	$x^2 +$

$2a^3b^2$
bb
b^2

$2ab^3 - 2a^2b^2, ab^3 - a^2b^2, 2b^3 - 2ab^2, b^3 - ab^2, 2abb - 2aab,$
$2ab + 2a^2b^2, ab^3 + a^2b^2, 2b^3 + 2ab^2, b^3 + ab^2, 2ab + 2a^2b,$
$2ab^4 - 2a^3b^2, ab^4 - a^3bb, 2b^4 - 2a^2b^2, b^4 - aabb, 2ab^3 - 2a^3b, a$

$2x^5 + 3ax^4 + b^2x^3 - a^2x^3 + 4ab^2x^2 + 6a^2b^2x + 2$

$2ab^4 - 2a^3b^2$	$a, 2a, b, 2b, b - a, 2b - 2a, b + a, 2b.$
	$bb, 2bb, ab, 2ab, bb - aa, 2bb2 - aa, ba - a$
	$bb + ab, 2ba - 2aa, 2ba + 2aa, 2bb -$
$2x^5 + b^2x^3$	$x, xx, 2xx + bb$
$2x^5 + 3ax^4 - a^2x^3$	$x, x^2, 2xx + 3ax - aa$

élevés à la même dimension, on n'aura qu'à commencer par mettre tous ses termes à la même dimension à l'aide d'une nouvelle lettre, & chercher les diviseurs de cette nouvelle quantité par les regles précédentes. Ces diviseurs trouvés, on en chassera la nouvelle lettre introduite en la supposant égale à l'unité, & l'on aura par ce moyen les diviseurs cherchés. Que j'aye, par exemple la quantité $x^6+bx^5-bx^4+x^2+bx-b$; je multiplie le terme bx^4 par a, afin de le rendre de six dimensions. Par la même raison je multiplie x^2 par a^4, bx par a^4, & b par a^5; ce qui me donne la quantité $x^6+bx^5-abx^4+a^4xx+a^4bx-a^5b$ que je trouve par les méthodes précédentes être le produit de $xx-ab+bx$ par x^4+a^4. Je suppose $a=1$ dans ces deux produisans, ce qui me donne $xx-b+bx$, & x^4+1 pour les deux produisans de la quantité proposée $x^6+bx^5-bx^4+x^2+bx-b$.

diviseurs des quantités qui ne sont pas homogenes.

X L I.

Il y a des cas où les diviseurs se trouvent plus facilement qu'en suivant les méthodes précédentes lorsqu'on a un peu d'habitude dans le calcul. Voici un de ces cas sur lequel il est bon de prévenir les Commençans.

Lorsque quelqu'une des lettres de la quantité proposée ne montera qu'à une dimension, il est aisé de voir qu'il ne peut y avoir qu'un des diviseurs de cette quantité qui contienne cette lettre. Donc il y aura au moins un diviseur qui ne la contiendra pas, & alors suivant la méthode de l'article XXIX, pour trouver

Cas où le diviseur se trouve plus facilement que par les méthodes précédentes.

ce diviſeur, il faudra chercher le plus grand commun diviſeur des termes où cette lettre ſe trouve, & des autres termes dans leſquels cette lettre ne ſe trouve pas.

Soit par exemple la quantité $x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x + cx^3 - acxx - 8a^2cx + ba^2c - 8a^4$; je cherche le plus grand commun diviſeur des deux parties $cx^3 - acxx - 8aacx + 6a^3c$ & $x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x - 8a^4$ de cette quantité, l'une contenant la lettre c, l'autre n'en contenant point, je trouve pour ce plus grand diviſeur commun $x^2 + 2ax - 2aa$, & c'eſt le diviſeur cherché de la quantité propoſée.





ELEMENS D'ALGEBRE.

QUATRIE'ME PARTIE.

Résolution des Equations de dégrés quelconques lorsqu'elles n'ont que deux termes, ou lorsqu'en ayant trois elles peuvent se réduire à celles qui n'en ont que deux par la méthode des Equations du second dégré : avec différentes opérations nécessaires pour ces Equations, comme l'élevation des puissances, l'extraction des racines, la réduction des quantités radicales, &c.



PRE'S avoir vû comment on tiroit d'une Equation qui passoit le second dégré, celles du premier & du second dégré qu'elle pouvoit renfermer ; il faut voir ce qu'on a fait pour résoudre

les Equations qui échappent à cette méthode.

I.

Des Equations du troisiéme dég é à deux termes.

Pour aller du plus simple au plus composé, nous commencerons par les Equations qui ne contiennent que deux termes ; supposons d'abord qu'elles ne montent qu'au troisiéme dégré, comme $ax^3 = b$.

Pour résoudre ces Equations, il est bien aisé d'imaginer de délivrer d'abord x^3 de son coefficient, & de prendre la racine cube des deux membres. Le caractere qu'on employe pour exprimer la racine cube, est le même que celui dont on se sert dans la racine quarrée ; mais l'on met un 3 au-dessus pour le distinguer.

On met un 3 sur le caractere $\sqrt{}$ pour exprimer la racine cube.

Ainsi pour exprimer la valeur de x qu'on tire de l'Equation $ax^3 = b$ ou $x^3 = \frac{b}{a}$, on met $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. Si par exemple $b = 1000$ & $a = 2$ on a $x = \sqrt[3]{500}$.

II.

Les radicaux cubes ne peuvent avoir qu'un signe à la fois.

Il est à observer qu'on n'a pas ici, comme dans les racines quarrées, la liberté de mettre + ou — devant le signe radical, mais qu'au contraire la racine cube d'une quantité est toujours de même signe que la quantité elle-même : à cause que le cube d'une quantité positive est positif, & que celui d'une quantité négative est négatif.

III.

III.

Cette résolution fournit assez naturellement une réfléxion qui paroît contredire celles qu'on a faites precédemment sur le nombre des racines des Equations. Car un cube n'ayant qu'une racine & cette racine n'ayant qu'un signe, il ne paroît pas qu'une Equation telle que $ax^3 = b$ donne plus d'une valeur de x, cependant suivant ce qu'on a vû ci-dessus, on devroit s'attendre à trouver trois racines dans une Equation du 3eme dégré, de même que deux dans une du second.

Que conclure de cette réfléxion ? abandonnera-t'on ce principe si satisfaisant par sa généralité, & qui suit si naturellement de la formation des Equations exposée dans la IIIme Partie, article II. ? Voici le dénouement de cette difficulté tiré de la même formation.

Qu'on mette l'Equation $ax^3 = b$ sous cette forme $x^3 - \frac{b}{a} = 0$, qu'on mette aussi sa racine $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ sous la forme $x - \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = 0$, qu'on divise alors $x^3 - \frac{b}{a}$ par $x - \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, on trouvera une Equation du second dégré qui contiendra les deux autres racines.

Pour en faire le calcul plus aisément, soit fait $\frac{b}{a} = c^3$, on aura donc au lieu des Equations précédentes $x^3 - c^3 = 0$, & $x - c = 0$; divisant la premiere par la seconde, il vient au quotient $xx + cx + cc = 0$, dont les deux racines sont exprimées par . . . . ;

$x = -\frac{1}{2}c + \sqrt{-\frac{3}{4}cc}$, & deviendront la seconde & la troisiéme valeur cherchée de x dans l'Equation $x^3 = \frac{b}{a}$, aussi-tôt qu'on aura remis à la place de c sa valeur $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$.

IV.

La substitution faite, on aura pour ces deux valeurs de x, $-\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}}$. Car on voit que le quarré de $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, c'est-à-dire le produit de $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ par $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ doit être $\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}$; & qu'en général la multiplication des racines cubes comme celles des racines quarrées se fait en multipliant d'abord les quantités qui sont sous le signe radical, & en mettant ensuite ce signe devant leur produit.

Comment on multiplie les radicaux cubes.

V.

Racines de l'Equation du troisiéme dégré à deux termes.

Les trois racines de l'Equation proposée $ax^3 = b$, sont donc $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, $x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}}$, $x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} - \sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{bb}{aa}}}$; la premiere réelle, & les deux autres imaginaires, mais cependant toujours telles qu'on peut dire qu'elles résolvent l'Equation proposée.

VI.

Suppoſons maintenant qu'on ait une Equation à deux termes d'un dégré quelconque, on la réſoudra de la même maniere, en employant un radical dont l'expoſant ſoit celui de l'inconnue dans cette Equation. Soit, par exemple, l'Equation $ax^m = b$, ou $x^m = \frac{b}{a}$, on en tirera $x = \sqrt[m]{\frac{b}{a}}$.

Des Equations à deux termes & d'un dégré quelconque.

Si m eſt un nombre impair, cette quantité ne pourra être que négative, lorſque $\frac{b}{a}$ ſera négatif, & elle ne pourra être que poſitive, lorſque $\frac{b}{a}$ ſera poſitif. Si m eſt un nombre pair, la racine aura comme dans le ſecond dégré le ſigne $\pm$, & elle ne ſera réelle que lorſque $\frac{b}{a}$ ſera poſitif. Dans le cas où $\frac{b}{a}$ ſera négatif (m toujours pair) les deux racines exprimées par $\pm\sqrt[m]{\frac{b}{a}}$ feront alors toutes les deux imaginaires. Ainſi toutes les Equations exprimées généralement par $x^m = \frac{b}{a}$ ne pourront au plus, avoir que deux racines réelles, les autres racines étant néceſſairement imaginaires.

Ces Equations ne ſçauroient jamais avoir plus de deux racines réelles.

Qu'on ait, par exemple, $x^4 = 256$, les deux racines réelles ſont $+4$ & -4, les deux imaginaires ſont $+\sqrt{-16}$ & $-\sqrt{-16}$ Dans l'Equation $x^5 = 243$ la ſeule racine réelle eſt $+3$, & les autres celles qu'on doit trouver

en résolvant l'Equation $x^4+3x^3+9x^2+27x+81=0$ qui vient par la division de l'Equation $x^5-243=0$ par l'Equation $x-3=0$. Sans résoudre cette Equation, on doit être assuré que ses racines sont toutes imaginaires, puisque s'il y en avoit quelqu'une de réelle, elle résoudroit aussi $x^5=243$, & par conséquent il y auroit d'autre nombre réel que 3 qui, élevé à la cinquiéme puissance, donneroit 243.

VII.

Il ne manque présentement à ce que nous venons de dire sur les Equations à deux termes, que de pouvoir abréger ou simplifier les expressions radicales qu'elles donnent lorsqu'il y aura une partie de la quantité dont on pourra prendre exactement la racine, ou même de pouvoir éviter entierement le signe radical lorsque la quantité entiere sera une puissance complette.

Pour reconnoître ces cas, il faut commencer par faire quelques réflexions sur l'inverse de l'opération qu'on se propose alors, c'est-à-dire sur l'élevation des quantités à des puissances quelconques.

Réflexions sur l'élevation des puissances.

Qu'on ait, par exemple une quantité telle que $abcd$ à élever à la puissance m, on voit bien qu'il viendra par cette opération $a^m b^m c^m d^m$.

Qu'il s'agisse d'élever à une puissance quelconque, une quantité, comme $\frac{abc}{de}$ qui a un diviseur, il est clair qu'il faudra élever le di-

viſeur, ainſi que le numérateur à cette puiſſance quelconque, & que s'il y avoit des coefficiens, il faudroit qu'ils fuſſent auſſi élevés à la même puiſſance. De plus, ſi les facteurs ou produiſans de la quantité donnée ſe trouvoient déja élevés à quelques puiſſances, ils deviendroient alors élevés à une nouvelle puiſſance, dont l'expoſant ſeroit le produit de l'expoſant qu'ils avoient d'abord par celui de la puiſſance à laquelle on les voudroit élever. Ainſi $\frac{2a^2b^3}{3c^4}$ élevé à la puiſſance 3, donnera.... $\frac{8a^6b^9}{27c^{12}}$; $\frac{a^mb^r}{c^n}$ à la puiſſance q, deviendra $\frac{a^{mq}b^{rq}}{c^{nq}}$. Tout cela eſt fort ſimple, & ſuit entierement de ce principe, qu'une quantité élevée à une puiſſance quelconque, eſt ce qui vient de la multiplication de cette quantité par elle-même autant de fois moins une, que l'expoſant de la puiſſance contient d'unités.

VIII.

Application des réfléxions précédentes à l'extraction des racines.

On voit bien préſentement que l'inverſe de cette opération, c'eſt-à-dire l'extraction des racines ne demandera autre choſe que de diviſer les expoſans des parties ou facteurs de cette quantité par l'expoſant de la racine; ſoit que ces parties ou facteurs ſoient dans le numérateur, ſoit qu'ils ſoient auſſi dans le dénominateur. Qu'il ſoit queſtion, par exemple de

prendre la racine cube de $\frac{a^3b^6}{c^9}$, en divisant par 3 les exposans 3, 6, 9, & en mettant leurs quotiens 1, 2, 3, aux mêmes lettres, on aura $\frac{ab^2}{c^3}$ pour la racine cube cherchée.

S'il y avoit eu un coefficient à la quantité, on en auroit pris la racine cube, $\frac{8a^3b^6}{c^9}$, par exemple, auroit donné $\frac{2ab^2}{c^3}$ pour sa racine cube.

De la même maniere, si on cherche la racine quarrée quarrée, ou quatriéme de $\frac{16a^4b^8}{d^4c^{12}}$, on trouvera $\frac{2ab^2}{dc^3}$.

IX.

De l'extraction des racines lorsqu'on a des puissances incompletes.

Lorsqu'il n'y aura qu'une partie de la quantité qui se pourra extraire, on l'extraira, & on laissera le reste sous le signe radical affecté de l'exposant qui lui convient. Soit proposé, par exemple, de prendre la racine cinquiéme de $\frac{32a^{10}b^8}{486c^7}$ qui est composé du produit de $\frac{32a^{10}b^5}{243c^5}$ par $\frac{b^3}{2c^2}$, dont la premiere est exactement la cinquiéme puissance de .....

$\frac{2a^2b}{3c}$, & dont la feconde n'a pas de cinquiéme racine, il faudra écrire alors $\frac{2a^2b}{3c}\sqrt[5]{\frac{b^3}{2c^2}}$.

De même la racine cube de $\frac{8a^3b+16a^3c}{54d}$ fera $\frac{2}{3}a\sqrt[3]{\frac{b+2c}{2d}}$, parce que $\frac{8a^3b+16a^3c}{54d}$ eft le produit de $\frac{8a^3}{27}$ par $\frac{b+2c}{2d}$, & que la premiere de ces deux quantités eft un cube parfait, celui de $\frac{2}{3}a$, & que la feconde n'a point de racine cube. De même $\sqrt[5]{\frac{32a^9+128a^6b^3-160a^5b^4}{3b^6}}$ $=\frac{2a}{b}\sqrt[5]{\frac{a^4+4ab^3-5b^4}{3b}}$.

X.

Lorfque la quantité dont il fera néceffaire d'extraire la racine fera compofée ainfi que les précedentes, de plufieurs termes, & qu'après avoir féparé de tous fes termes les quantités communes qui font des puiffances complettes, on foupçonnera que le refte pourroit être la puiffance complette de quelque quantité commenfurable compofée de plufieurs termes, l'opération qu'il faudra faire pour s'en affurer fera plus difficile. Afin de trouver la méthode qu'il faut fuivre dans cette opéra-

tion, nous commencerons par faire quelques réfléxions sur le Problême inverse, c'est-à-dire sur l'élevation des quantités complexes à des exposans donnés, & nous en tirerons ensuite les principes, qu'il faut pour extraire les racines de ces sortes de quantités.

Cherchons d'abord comment l'élevation au cube peut donner la méthode d'extraire les racines cubes, on verra après que les autres puissances n'augmentent la difficulté que par la longueur des calculs.

XI.

Soit prise la quantité complexe la plus simple $u+z$, & soit élevée cette quantité au cube. L'on aura premierement pour son quarré $uu+2uz+zz$, & multipliant ce quarré par la simple puissance, on aura enfin le cube $u^3+3uuz+3uzz+z^3$, qui apprend qu'une quantité quelconque composée de deux parties, étant élevée au cube, donne d'abord le cube de la premiere partie, ensuite le triple du quarré de cette premiere partie multiplié par la seconde partie; de plus, le triple de la premiere partie multiplié par le quarré de la seconde; enfin le cube de la seconde.

En quoi consiste le cube d'un binome

XII.

Méthode qu'il faut suivre pour prendre la racine cube des quantités complexes.

Qu'on ait donc une quantité dont on veuille extraire la racine cube, on commencera par y chercher un terme qui soit un cube, & ce cube représentera u^3, l'on écrira à côté sa racine qui représentera u, on triplera ensuite

le quarré de cette racine, & on le fera servir de diviseur à ce qui reste de la quantité donnée de laquelle on aura ôté le cube de la racine premierement posée; le quotient de cette division sera la seconde partie de la racine, & représentera z; l'ayant écrit à côté du premier terme, on multipliera ensuite ce dernier terme par la quantité qui représente $3uu + 3uz + zz$, c'est-à-dire par le triple du quarré de la premiere partie, plus le triple du produit de la premiere quantité par la seconde, plus le quarré de la seconde: la multiplication faite, on retranchera le produit qu'elle donnera de la quantité proposée, dont le premier cube représentant u^3 a déja été ôté. S'il ne reste rien, on sera sûr que la quantité étoit exactement le cube du binome répondant à $u + z$. S'il reste encore plusieurs termes, & qu'on veuille sçavoir si elle ne seroit point le cube d'un trinome; pour trouver le troisiéme terme, on fera des deux termes déja écrits, le même usage qu'on a fait du premier terme lorsqu'on a cherché le second.

XIII.

Quelques exemples éclairciront cette méthode. Soit la quantité $8y^6 + 60y^4b^2 + 150b^4y^2 + 125b^6$; je commence par prendre la racine cube du premier terme $8y^6$, & j'écris cette racine (voyez la Table ci-jointe Case 1) $2y^2$ a côté de la quantité proposée; je récris ensuite le cube de $2y^2$ avec le signe — sous la quantité proposée, en observant d'en chan-

Premier exemple.

ger le signe, la soustraction ou réduction faite, j'écris le reste $60y^4b^2 + 150b^4y^2 + 125b^6$, je mets au-dessus de $2y^2$ le triple de son quarré, c'est-à-dire $12y^4$, & je divise le premier terme $60y^4b^2$ par ce triple $12y^4$, quant au quotient $5b^2$ qui vient de cette division, je l'écris à côté de $2y^2$; j'ajoute ensuite à $12y^4$, $30b^2y^2$ produit du triple de $2y^2$ par la quantité $5b^2$ que je viens d'écrire, & j'ajoute à ces deux premiers termes $25b^4$ quarré de $5b^2$.

Cela fait, je multiplie $5b^2$ par ces trois termes, & j'écris leurs produits avec des signes différens sous la quantité $60y^4b^2 + 150b^4y^2 + 125b^6$, & voyant qu'après la réduction il ne reste rien, je conclus que la quantité proposée étoit un cube parfait, & que sa racine étoit $2y^2 + 5b^2$.

XIV.

Second exemple.

Que j'aye à présent la quantité $x^6 + 6bx^5 + 21b^2x^4 + 44b^3x^3 + 63b^4x^2 + 54b^5x + 27b^6$ qu'on voit bien au premier coup d'œil devoir donner plus de deux termes pour sa racine cube, je commence d'abord par trouver avec la même facilité (voyez la table ci-jointe Case 2) que dans l'exemple précédent les deux premiers termes $x^2 + 2bx$; mais comme au lieu de ne rien rester ainsi qu'il est arrivé dans cet exemple, il vient pour reste $9b^2x^4 + 36b^3x^3 + 63b^4x^2 + 54b^5x + 27b^6$, je divise le premier terme $9b^2x^4$ de ce reste par $3x^4$ triple du quarré de x^2, parce que ce ter-

me $3x^4$ est le premier du triple du quarré de la quantité $xx+2bx$, laquelle représente actuellement la premiere partie (nommée *u* art. XI.) de la racine cube cherchée : ayant fait cette division de $9b^2x^4$ pour $3x^4$, j'écris le quotient $3b^2$ à côté de $xx+2bx$. Je forme ensuite la quantité $3x^4+12bx^3+21b^2x^2+18b^3x+9b^4$, en ajoutant ensemble le triple du quarré de $xx+2bx$, le triple du produit de $xx+2bx$ par $3b^2$, & le quarré de $3b^2$. Cela fait, je multiplie cette quantité par $3b^2$, & j'écris tous les termes du produit, en changeant leurs signes, sous la quantité $9b^2x^4+36b^3x^3+63b^4x^2+54b^5x+27b^6$, & comme il ne reste rien après la réduction, je conclus que $x^2+2bx+3b^2$ est exactement la racine cube de la quantité proposée.

XV.

Nous avons vû (IIme Part. art. XXIV, XXV & XXVI.) comment on faisoit, sur les quantités radicales du second dégré, les opérations d'addition, soustraction, multiplication, & division. Comme ces opérations sont également nécessaires pour les quantités radicales des dégrés plus élevés, nous allons examiner ce que demandent ces nouveaux radicaux.

Additions & soustractions des quantités radicales de toute espece.

Quant à l'addition & à la soustraction, il n'y a rien à ajouter à ce qu'on a dit pour les mêmes opérations sur les radicaux du second dégré, car il suffit de réduire chaque radical à sa plus simple expression, & de les ajouter ou de les retrancher comme les quantités commensurables.

Qu'on ait, par exemple $\sqrt[3]{b^4+2ab^3}$ à ôter de $\sqrt[3]{8a^3b+16a^4}$, on change la premiere quantité en $b\sqrt[3]{b+2a}$, & la feconde en $2a\sqrt[3]{b+2a}$; or la fouftraction eft alors toute fimple, & donne $\overline{2a-b}\sqrt[3]{b+2a}$.

De même fi on ajoute $3a\sqrt[4]{16b^8+32b^4a^4}$ avec $4b\sqrt[4]{a^4b^4+2a^8}$, on aura $10ab\sqrt[4]{b^4+2a^4}$.

X V I.

Multiplication & divifion des quantités radicales qui ont mêmes expofans.

A l'égard de la multiplication & de la divifion, fi les quantités radicales font de même expofant, c'eft encore la même méthode que dans les radicaux du fecond dégré, il fuffit de faire l'opération fur les quantités précédées du figne radical, & de mettre le même figne devant le produit, ou devant le quotient, fuivant qu'on aura fait une multiplication ou une divifion.

Exemples.

C'eft ainfi que $\sqrt[3]{5ayy}\times\sqrt[3]{7ayz}=\sqrt[3]{35aay^3z}$; ou $y\sqrt[3]{35a^2z}$.

Que $\sqrt[5]{\frac{9a^2b^3}{4}}\times\sqrt[5]{27a^3b^6}=\sqrt[5]{\frac{243a^5b^9}{4}}$ $=3ab\sqrt[5]{\frac{b^4}{4}}$.

Que $\sqrt[3]{a^2b^2+b^4}$ divifé par $\sqrt[3]{\frac{a^2-b^2}{8b}}$ don-

ne pour quotient $\sqrt[3]{\frac{8a^2b^3+8b^5}{a^2-b^2}}=2b\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}$.

Que $\frac{\sqrt[3]{a^2x^3-x^4}}{\sqrt[3]{ab^4+b^4x}}=\frac{x}{b}\sqrt[3]{\frac{a-x}{b}}$.

XVII.

Mais si l'on veut faire ces mêmes opérations sur des quantités radicales de différens signes, & qu'on ne veuille pas se contenter de la simple marque de multiplication, il faut changer ces quantités radicales en d'autres d'un radical plus composé qui soit le même pour chacune des deux quantités à multiplier ou à diviser.

Pour faire ces opérations sur les quantités radicales de différens exposans, il faut les réduire au même exposant.

Qu'on ait, par exemple $\sqrt[3]{ab}$ & $\sqrt[5]{abb}$ à réduire à un même signe, j'éleve ab à la puissance 5, & j'écris $\sqrt[15]{}$, au lieu de $\sqrt[3]{}$, & j'ai la quantité $\sqrt[15]{a^5b^5}$ qui est la même chose que $\sqrt[3]{ab}$, j'éleve de même ab^2 à la troisiéme puissance, & je mets $\sqrt[15]{}$ au lieu de $\sqrt[5]{}$; ce qui change la quantité $\sqrt[5]{ab^2}$ en $\sqrt[15]{a^3b^6}$. Ainsi s'il avoit fallu multiplier $\sqrt[3]{ab}$ par $\sqrt[5]{abb}$, il seroit venu pour produit $\sqrt[15]{a^8b^{11}}$; & si j'avois eu à diviser la premiere par la seconde, j'aurois trouvé pour quotient $\sqrt[15]{\frac{a^5b^5}{a\ \ b}}=\sqrt[15]{\frac{a^2}{b}}$.

Méthode pour cette réduction.

De même le produit de $\sqrt[3]{a^2 b^4}$ par $\sqrt{a^4 b^5}$ auroit été $\sqrt[6]{a^{16} b^{23}} = a^2 b^3 \sqrt[6]{a^4 b^5}$.

En général pour réduire deux quantités radicales $\sqrt[m]{a^p b^q}$ & $\sqrt[n]{a^r b^s}$ à un même signe, on changera la premiere en $\sqrt[mn]{a^{pn} b^{qn}}$, & la seconde en $\sqrt[mn]{a^{rm} b^{sm}}$; s'il est question alors de les multiplier, leur produit sera $\sqrt[mn]{a^{pn+rm} b^{qn+sm}}$, & si on vouloit diviser la premiere par la seconde, le quotient seroit $\sqrt[mn]{a^{pn-rm} b^{qn-sm}}$.

Lorsque les deux quantités radicales auront pour exposans des nombres qui auront un commun diviseur, on voit qu'il ne sera pas nécessaire de changer chaque radical en un autre, dont l'exposant soit le produit de deux premiers exposans; par exemple que l'on ait $\sqrt{ab}$ & $\sqrt[4]{ab^3}$, on changera le premier en $\sqrt[4]{a^2 b^2}$; qu'on ait de même $\sqrt[4]{a^3}$ & $\sqrt[6]{a^5 b}$, on changera la premiere en $\sqrt[12]{a^9 b^3}$, & la seconde en $\sqrt[12]{a^{10} b^2}$.

XVIII.

Autre maniere de faire les opérations précédentes.

On peut trouver une autre méthode pour faire les opérations précédentes, en employant une réflexion sur la nature des quantités radicales, qui suit assez naturellement de ce qu'on a dit art. VIII. pour extraire toutes sortes de

racines. C'est que les quantités radicales peuvent être regardées comme des puissances, dont les exposans sont fractionnaires.

Pour faire voir, non-seulement comment on est arrivé à cette réflexion, mais la maniere dont on en a fait usage; cherchons par le moyen de ce que nous avons vû précédemment ce que peuvent être les quantités $\sqrt[m]{a^p b^q}$ & $\sqrt[n]{a^r b^s}$ employés dans l'exemple précédent.

Suivant ce qu'on a dit art. VIII. si on avoit les nombres qu'expriment les exposans p & q, on les diviseroit par le nombre exprimé par m, & on prendroit leur quotient pour servir d'exposants à a & à b, & ce seroit la premiere quantité exprimée $\sqrt[m]{a^p b^q}$. Mais sans sçavoir les valeurs particulieres de p, q, m, il est évident qu'on peut en cette occasion, comme en toutes les autres, écrire généralement $\frac{p}{m}$ & $\frac{q}{m}$ pour les quotiens de la division de p & de q par m, c'est-à-dire pour les exposans de a & de b dans la racine m de $a^p b^q$; Donc $a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}}$ est cette racine. De même $\sqrt[n]{a^r b^s}$ sera $a^{\frac{r}{n}} b^{\frac{s}{n}}$ Pour multiplier présentement les deux quantités $a^{\frac{r}{n}} b^{\frac{s}{n}}$ &..... $a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{s}{m}}$, dans lesquelles sont changées les

quantités qu'on avoit à multiplier art. XVII. il faut, comme dans toutes les multiplications de quantités incomplexes, ajouter les exposans des mêmes lettres, c'est-à-dire $\frac{p}{m}$ & $\frac{s}{n}$ avec $\frac{q}{m}$, ce qui donnera $a^{\frac{p}{m}+\frac{r}{n}}b^{\frac{s}{n}+\frac{q}{m}}$ ou $a^{\frac{pn+rm}{mn}}b^{\frac{sm+qn}{mn}}$, en mettant les fractions $\frac{p}{m}$ & $\frac{r}{n}$ au même dénominateur aussi-bien que $\frac{s}{n}$ & $\frac{q}{m}$.

Ainsi $a^{\frac{pn+rm}{mn}}b^{\frac{sm+qn}{mn}}$, c'est-à-dire le produit de a élevé à la puissance $\frac{pn+rm}{mn}$ par b élevé à la puissance $\frac{sm+qn}{mn}$ est le produit des quantités proposées.

Il est aisé de voir présentement l'identité de cette expression $a^{\frac{pn+rm}{mn}}b^{\frac{sm+qn}{mn}}$, & de l'expression $\sqrt[mn]{a^{pn+rm}b^{sm+qn}}$ qu'on avoit trouvé dans cet article XVIII. Car par la même

même raiſon qu'on vient de voir que $\sqrt[m]{a^p}$ & $a^{\frac{p}{m}}$ ne déſignoient que la même quantité, on doit voir que $a^{\frac{pn+rm}{mn}}$ & $\sqrt[mn]{a^{pn+rm}}$ ſont la même choſe, ainſi que $\sqrt[mn]{b^{sm+qn}}$ & $b^{\frac{sm+qn}{mn}}$.

Si on avoit voulu au contraire diviſer la premiere quantité $\sqrt[m]{a^p b^q}$ par la ſeconde . . . $\sqrt[n]{a^p b^s}$, on auroit retranché l'expoſant $\frac{r}{n}$ de $\frac{p}{m}$ & l'expoſant $\frac{q}{m}$ de $\frac{s}{n}$, & l'on auroit eu $a^{\frac{p}{m}-\frac{r}{n}} b^{\frac{s}{n}-\frac{q}{m}}$ ou $a^{\frac{pn-rm}{mn}} b^{\frac{sm-qn}{mn}}$ pour le quotient.

Afin qu'on ſe familiariſe avec cette tranſformation de quantités radicales en puiſſances fractionnaires, faiſons-en encore quelqu'application. Soit propoſé, par exemple, de diviſer $\sqrt[2p]{a^m b^{3n} c^2}$ par $\sqrt[p]{a^{2m} b^n c}$. On changera d'abord la premiere quantité en $a^{\frac{m}{2p}} b^{\frac{3n}{2p}} c^{\frac{1}{p}}$, & la ſeconde en $a^{\frac{2m}{p}} b^{\frac{n}{p}} c^{\frac{1}{p}}$, enſuite on retranchera les expoſans $\frac{2m}{p}$, $\frac{n}{p}$, $\frac{1}{p}$, qu'ont les lettres a, b, c dans la ſeconde, des expoſants

$\frac{m}{2p}$, $\frac{3n}{2p}$, $\frac{1}{p}$ qu'ont les mêmes lettres dans la premiere, & les restes $-\frac{3m}{2p}$, $\frac{n}{2p}$, o, seront les exposans à donner aux mêmes lettres dans le quotient, c'est-à-dire que $a^{-\frac{3m}{p}} b^{\frac{n}{2p}} c$ est ce quotient.

En trouvant une pareille quantité, il est naturel qu'on soit un peu embarrassé à sçavoir ce qu'elle signifie, car n'ayant point encore rencontré d'exposant qui soit ou zero ou négatif, on ne sçait ce que deviennent les quantités dont elles sont les exposans.

Pour se tirer de cet embarras, soit reprise la question dans l'endroit où commence à paroître la difficulté, c'est-à-dire, lorsqu'on retranche les exposants $\frac{2m}{p}$ de $\frac{m}{2p}$ & $\frac{1}{p}$ de $\frac{1}{p}$ afin de diviser $a^{\frac{m}{2p}}$ par $a^{\frac{2m}{p}}$ & $c^{\frac{1}{p}}$ par $c^{\frac{1}{p}}$.

C'est donc à la place de $\frac{c^{\frac{1}{p}}}{c^{\frac{1}{p}}}$ qu'on met c^{o};

& à la place de $\frac{a^{\frac{m}{2p}}}{a^{\frac{2m}{p}}}$ qu'on met $a^{-\frac{3m}{2p}}$; mais

au lieu de $\frac{a^{\frac{m}{2p}}}{a^{\frac{m}{p}}}$ on peut mettre $\frac{1}{a^{\frac{3m}{2p}}}$ à cause que $a^{\frac{2m}{p}}$ est le produit de $a^{\frac{3m}{2p}}$ par $a^{\frac{m}{2p}}$, & au lieu de $\frac{c^{\frac{1}{p}}}{c^{\frac{1}{p}}}$ on peut mettre 1.

Donc les deux quantités à examiner $a^{-\frac{3m}{2p}}$ & c^{0} expriment l'une $\frac{1}{a^{\frac{3m}{2p}}}$, & l'autre 1. Et partant le quotient cherché de $\sqrt[2p]{a^{m}b^{3n}c^{2}}$ divisé par $\sqrt[p]{a^{2m}b^{n}c}$ est $\frac{1}{a^{\frac{3m}{2p}}} \times b^{\frac{n}{2p}} \times 1$ ou $\frac{b^{\frac{n}{2p}}}{a^{\frac{3m}{2p}}}$.

XIX.

La nouveauté des expressions qu'on vient d'employer dans l'article précédent, & la généralité qu'elles apportent dans l'analyse mérite qu'on en fasse une courte récapitulation en les réduisant en principes généraux.

Ce que c'est qu'une puissance fractionnaire.

1° Lorsqu'une quantité quelconque a pour exposant une fraction, on peut la changer en la racine d'une quantité dont l'exposant sera entier, en prenant pour exposant de la racine le dénominateur de l'exposant proposé, & pour exposant de la quantité sous le signe radical le numérateur du même exposant fractionaire, c'est-à-dire, en termes algebriques, qu'en général $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$.

Ce que c'est qu'une puissance négative.

2°. Lorsqu'une quantité a un exposant négatif, on la peut changer en une fraction dont le numérateur est l'unité, & dont le dénominateur est la même quantité avec un exposant pareil au proposé, mais avec le signe +, c'est-à-dire qu'en général $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

Ce que c'est que la puissance 0.

3°. Toute quantité dont l'exposant est zero se réduit à l'unité, c'est-à-dire que $a^0 = 1$.

La démonstration de ces trois propositions prises dans leur plus grande généralité ne demande point d'autres raisonnemens que ceux qu'on a employés dans l'article précédent. Cependant pour se ressouvenir plus aisément de ces propositions, & pour s'en servir avec plus de confiance, il est à propos de les considerer à part, ce qui se fera facilement de la maniere suivante.

1°. On demontrera que $a^{\frac{n}{m}}$ est la racine m de a^n, si on fait voir qu'en élevant $a^{\frac{n}{m}}$ à la

puissance m, il vient a^n. Or pour élever $a^{\frac{n}{m}}$ à la puissance m, il est évident qu'il faut multiplier son exposant par m, ce qui donnera $a^{\frac{n}{m}\times m}$ ou a^n.

2°. a^{-m} sera nécessairement égal à $\frac{1}{a^m}$, si en multipliant ces deux quantités par une même puissance de a, il vient le même produit. Or qu'on les multiplie l'un & l'autre par une puissance de a plus élevée que m par a^{2m}, par exemple, on aura $a^{2m} \times a^{-m}$ ou a^{2m-m} ou a^m pour le produit de a^{2m} par a^{-m}, & de même $a^{2m} \times \frac{1}{a^m}$ ou a^m pour le produit de a^{2m} par $\frac{1}{a^m}$, donc a^{-m} & $\frac{1}{a^m}$ sont égaux.

3°. Par la même raison a^0 & 1 sont égaux, puisqu'en les multipliant l'un & l'autre par a, il vient $a^{0+1} = 1a$ ou $a=a$.

Comme ces trois seules propositions suffisent pour toutes les réductions, & les transformations de même espece que les précédentes, & pour une infinité d'autres opérations, les Commençans ne sçauroient trop s'exercer à en faire des applications. Pour leur en donner le moyen, j'ai joint plusieurs exemples dans la troisiéme Case de la Table ci-jointe.

XX.

Après avoir résolu toutes les difficultés

qu'on pouvoit rencontrer dans les Equations à deux termes, il eſt naturel qu'on ait cherché auſſi à réſoudre généralement toutes celles qui n'ont que trois termes, mais on eſt bien loin encore d'avoir trouvé une méthode générale pour toutes les Equations de cette nature; on s'eſt contenté de les réſoudre dans quelques cas particuliers. Par exemple on a trouvé une Claſſe d'Equations aſſez étendue qui pouvoit ſe réduire facilement aux deux cas que nous avons déja vûs, celui des Equations du ſecond dégré, & celui des Equations à deux termes d'un dégré quelconque.

Des Equations à trois termes qui ſe réſolvent par la méthode du ſecond dégré.

Ces Equations ſont toutes celles qu'on peut mettre ſous cette forme générale .... $x^{2m} + ax^{m} = b$. Pour les réſoudre on ajoutera ainſi que dans les Equations du ſecond dégré ce qui manque au premier membre pour en faire un quarré, ce qui donnera $x^{2m} + ax^{m} + \frac{1}{4}aa = b + \frac{1}{4}aa$ dont la racine eſt $x^{m} + \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$, & par conſéquent $x^{m} = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$ qui n'eſt qu'une Equation à deux termes, & qui donne pour la valeur de x, $\sqrt[m]{-\frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}}$, par laquelle on réſoudra toutes les Equations à trois termes dont le premier ſera affecté d'une puiſſance d'x double de celle qui affecte le ſecond terme, & dont le troiſiéme ſera une quantité connue, on voit par la nature de cette expreſſion, & par ce qu'on ſçait déja ſur les racines des Equations, que toutes les Equations renfermées dans la formule générale

$x^{2m} + ax^m = b$ ne peuvent pas avoir plus de quatre racines réelles, & qu'elles n'en auront que deux, lorſque m ſera un nombre impair.

XXI.

Pourfaire quelqu'application de cette méthode, ſuppoſonsd'abord qu'onait l'Equation $x^4 - bbxx = bbcc$, en ajoutant des deux côtés $\frac{1}{4}b^4$ quarré de la moitié du coefficient de xx; on aura $x^4 = bbxx + \frac{1}{4}b^4 = \frac{1}{4}b^4 + bbcc$, dont la racine quarrée eſt $xx - \frac{1}{2}bb = \pm b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}$ d'où l'on tire $xx = \frac{1}{2}bb \pm \sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}$, & partant $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}bb \pm b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}}$ ſuſceptible de deux valeurs réelles & de deux imaginaires. Les deux premieres ſont ..... $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}}$, les deux autres $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}bb - b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}}$, néceſſairement imaginaires à cauſe que $b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}$ eſt plus grand que $\frac{1}{2}bb$.

Exemple de la méthode précédente.

XXII.

Soit enſuite l'Equation $x^6 - 2a^2bx^3 = a^6$; ajoutant des deux côtés a^4bb il vient $x^6 - 2aabx^3 + a^4bb = a^4bb + a^6$ dont la racine quarrée eſt $x^3 - aab = a^2\sqrt{aa + bb}$ ou $x^3 = aab \pm a^2\sqrt{aa + bb}$ qui donne enfin $x = \sqrt[3]{aab \pm a^2\sqrt{a^2 + b^2}}$ ſuſceptible de deux valeurs réelles; l'une poſitive, l'autre né-

Autre exemple.

gative. Les quatre autres racines de la même Équation qu'on trouveroit facilement en opérant comme dans l'article III. feroient imaginaires.

XXIII.

Troiſiéme exemple.

Soit à préſent $x^4 - \overline{aa + bb} \times xx = - aabb$ en ajoutant des deux côtés $\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}aabb + \frac{1}{4}b^4$, on aura $x^4 - \overline{aa + bb} \times xx + \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}aab^2 + \frac{1}{4}a^4 = \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{2}aabb + \frac{1}{4}b^4$, dont le ſecond membre eſt auſſi bien un quarré que le premier. Prenant enſuite la racine quarrée de part & d'autre, on a $xx - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb = + \frac{1}{2}aa \mp \frac{1}{2}bb$ qui donne $xx = aa$ & $xx = bb$, c'eſt-à-dire $x = + a$ & $x = \pm b$ qui ſont les quatre racines de l'Equation $x^4 - \overline{aa + bb} \times xx = - aabb$; on auroit trouvé également ces racines par les méthode de la troiſiéme Partie en cherchant les diviſeurs commenſurables.

XXIV.

Quatriéme exemple.

Soit encore l'Equation $x^4 - \overline{2gh + 4ff} \times xx = - gghh$, on aura en ajoutant le quarré de la moitié du coefficient du ſecond terme, & en prenant enſuite la racine quarrée, $x^2 - gh - 2ff = \pm 2f\sqrt{gh + ff}$ qui donne ..... $x = \pm\sqrt{gh + 2ff \pm 2f\sqrt{gh + ff}}$. Or en refléchiſſant un peu ſur cette quantité on découvre bien-tôt que ce qui eſt ſous le ſigne radical eſt un quarré, celui de $f \pm \sqrt{ff + gh}$;

car on voit dans le terme $2f\sqrt{gh+ff}$ le double produit de f & de $\sqrt{gh+ff}$, & dans la quantité $gh+2ff$ on voit le quarré de f & le quarré $ff+gh$ de la partie radicale.

Ainſi la valeur précédente de x ſe réduit, en ſuppoſant qu'on eut choiſi le ſigne $+$ pour le premier radical, à $f\pm\sqrt{ff+gh}$, & en ſuppoſant qu'on eut pris le ſecond ſigne $-$ du même premier radical, à $-f\mp\sqrt{ff+gh}$; ce ſont là les quatre racines de l'Equation $x^4 - 2ghxx - 4ffxx = -gghh$.

Dans cet exemple l'habitude du calcul pouvoit facilement faire ſoupçonner que la quantité $gh+2ff\pm 2f\sqrt{gh+ff}$ avoit une racine quarrée; mais il pourroit y avoir beaucoup de cas où les quantités trouvées de la même maniere ſeroient auſſi des quarrés ſans qu'on s'en doutât, il eſt donc à propos de chercher une méthode générale pour reconnoître ces ſortes de quantités, & pour trouver leurs racines.

XXV.

Méthode pour trouver les racines quarrées des quantités en partie commenſurables, & en partie radicales.

Pour y parvenir, je commence par remarquer que la racine d'une quantité compoſée de deux parties, dont l'une eſt commenſurable, & dont l'autre eſt un radical du ſecond degré, doit être elle-même compoſée de deux parties, & qu'au moins l'une des deux doit être un radical.

Cela poſé, je prends $A+B$ pour exprimer en général la quantité propoſée, A déſi-

gnant la partie rationelle, & B un radical quelconque du second dégré, je prends ensuite $p+q$ pour exprimer la racine cherchée.

Je remarque maintenant que soit que p soit la quantité radicale, soit que ce soit q, ou que ce soit tous les deux, le quarré $p^2+2pq+q^2$ ne pourra avoir que le terme $2pq$ de radical; comparant donc ce quarré avec la quantité donnée; $2pq$ représentera B & p^2+q^2, A, c'est-à-dire, en termes algébriques, qu'on aura pour déterminer p & q les deux Equations $p^2+q^2=A$, $2pq=B$.

On tire de la seconde $p=\frac{B}{2q}$ qui étant substituée dans la premiere donne........ $\frac{B^2}{4q^2}+q^2=A$ ou $q^4-Aq^2=-\frac{B^2}{4}$ ou.. $q^2-\frac{1}{2}A=\pm\frac{1}{2}\sqrt{AA-BB}$, & partant $q=\pm\sqrt{\frac{1}{2}A\pm\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$. Substituant ensuite cette valeur de q dans l'Equation $p^2+q^2=A$ ou $p=\mp\sqrt{A-q^2}$ on a $p=\pm\sqrt{\frac{1}{2}A\mp\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$, donc la racine cherchée de la quantité $A+B$ est....... $\pm\sqrt{\frac{1}{2}A\pm\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}A\mp\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$ ou simplement.................... $\pm\sqrt{\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}+\sqrt{\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$.

Car il est évident que cette expression revient absolument au même que l'expression

$\pm\sqrt{\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}+\sqrt{\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$ qu'on auroit en prenant en $-$ le ſigne de $\sqrt{A^2-B^2}$.

Quant aux ſignes que doivent avoir les deux parties

$\sqrt{\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$ & $\sqrt{\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$ de la racine cherchée de $A+B$, ils doivent être les mêmes, ſi le radical B eſt poſitif & contraire, ſi B eſt négatif, car il eſt aiſé de voir qu'en général $p+q$ ou $-p-q$ étant la racine de $A+B=pp+qq+2pq$, $p-q$ ou $-p+q$ eſt celle de $A-B=pp+qq-2pq$.

XXVI.

Par la valeur qu'on vient de trouver pour la racine de la quantité $A+B$, on pourroit craindre de tomber dans une difficulté pareille à celle qu'on avoit d'abord à réſoudre. Car $\sqrt{\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$ & $\sqrt{\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$ ſemblent au premier coup d'œil déſigner des racines de quantités en parties rationelles, & en parties irrationèlles, & ſi cela étoit la difficulté ſeroit reſtée au même point. Il faut donc pour que la méthode ſoit de quelque utilité, que la quantité A^2-B^2 qui ſe trouve ſous le ſigne radical, ſoit un quarré commenſurable. Or c'eſt ce qui ne ſçauroit manquer d'arriver toutes les fois que $A+B$ ſera dans le cas d'avoir une racine. Pour s'en aſſurer, il

suffit de se ressouvenir (article xxv) que $\overline{p-q}$ est $\sqrt{A-B}$ en même - tems que $\overline{p+q}$ est $\sqrt{A+B}$, car on en tirera tout de suite que $\sqrt{A-B} \times \sqrt{A+B}$ ou $\sqrt{AA-BB}$ est $\overline{p-q} \times \overline{p+q}$ ou $pp-qq$, c'est-à-dire une quantité commensurable.

XXVII.

Application de la methode précédente à un exemple.

Pour montrer présentement l'application de la methode précédente, soit pris pour exemple la quantité $aa+2c\sqrt{aa-cc}$ en la comparant avec $A+B$, on a $a^2=A$ & $B=2c\sqrt{aa-cc}$, & par conséquent $\sqrt{A^2-B^2}=aa-2cc$ d'où l'on tire $\sqrt{\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}=\sqrt{aa-cc}$, & de même $\sqrt{\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}=c$; c'est-à-dire que la racine cherchée est $c+\sqrt{aa-cc}$ ou $-c-\sqrt{aa-cc}$.

XXVIII.

Autre exemple.

Si on avoit à prendre la racine quarrée de $16+6\sqrt{7}$, en faisant $A=16$ & $B=6\sqrt{7}$ on auroit $\sqrt{AA-BB}=2$, & partant $\sqrt{\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{AA-BB}}$ feroit 3 & $\sqrt{\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{AA-BB}}$ feroit $\sqrt{7}$, d'où $3+\sqrt{7}$ ou $-3-\sqrt{7}$ feroit la racine cherchée.

XXIX.

Soit maintenant la quantité .... $ap - 2a\sqrt{ap - aa}$. Faisant $A = ap$ & $B = -2a\sqrt{ap - aa}$ on a $\sqrt{AA - BB} = ap - 2aa$ & $\sqrt{\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{AA - BB}} = \sqrt{ap - aa}$, & de même $\sqrt{\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}} = a$, c'est-à-dire que la racine cherchée sera $\sqrt{ap - aa} - a$ ou $a - \sqrt{ap - aa}$.

XXX.

Troisiéme exemple.

Si la quantité proposée est $b^2 - ab + \frac{1}{4}a^2 + 2\sqrt{ab^3 - 2a^2b^2 + \frac{1}{4}a^3b}$; on aura $A = b^2 - ab + \frac{1}{4}aa$, $B = 2\sqrt{ab^3 - 2a^2b^2 + \frac{1}{4}a^3b}$, & $\sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{b^4 - 6ab^3 + \frac{19}{2}a^2b^2 - \frac{3}{2}a^3b + \frac{1}{16}a^4} = bb - 3ab + \frac{1}{4}aa$, ce qui donnera $\sqrt{\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}} = \sqrt{bb - 2ab + \frac{1}{4}aa}$ & $\sqrt{\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}} = \sqrt{ab}$ d'où la racine cherchée est $\sqrt{ab} + \sqrt{bb - 2ab + \frac{1}{4}aa}$ ou $-\sqrt{ab} - \sqrt{bb - 2ab + \frac{1}{4}aa}$. Cet exemple est plus propre que les précédens à faire voir la néceſſité de ſçavoir prendre la racine des quantités en parties rationelles & en parties irrationelles. Car dans les cas précédens la racine cherchée ne contenant qu'un radical pouvoit être tirée d'une Equation du ſecond dégré

qui auroit été contenue dans l'Equation pour la résolution de laquelle on avoit cherché à prendre cette racine. Au lieu que dans ce dernier la valeur de la racine cherchée contenant deux radicaux, il étoit impossible qu'elle vint d'aucune Equation du second dégré. En effet, lorsque nous avons eu à prendre (art. XXVII) la racine de $aa + 2c\sqrt{aa - cc}$, c'étoit la même chose que si on avoit dû résoudre l'Equation $x^4 - 2aaxx - 4aacc + 4c^4 + a^4$ de laquelle on pouvoit tirer par la IIIeme Partie art. XXXVI. les Equations $xx - 2cx + 2cc - aa = 0$ & $xx + 2cx + cc - aa = 0$, au lieu que la racine quarrée de .... $b^2 - ab + \frac{1}{4}aa + \sqrt{ab^3 - 2a^2b^2 + \frac{1}{4}a^3b}$ devoit servir à la résolution de $x^4 + 2 \times \overline{ab - bb - \frac{1}{4}aa} \times x^2 + \frac{19}{2}a^2b^2 - 6ab^3 - \frac{3}{2}a^3b + b^4 + \frac{1}{16}a^4 = 0$ qui n'est point décomposable en deux Equations du second dégré.

XXXI.

Après avoir appris à distinguer parmi les quantités qui sont en partie rationelles, & en partie irrationelles, celles qui sont des quarrés, on a dû chercher à distinguer aussi celles qui sont des cubes ou d'autres puissances plus élevées, puisque cela étoit nécessaire pour avoir completement tout ce qui regarde les Equations comprises sous la forme $x^{2m} + ax^m = b$ ou $x = \sqrt[m]{-\frac{1}{2}a + \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}}$. Voyons d'abord ce que l'on pouvoit faire pour le cas où $m = 3$,

c'est-à-dire pour trouver la racine cube d'une quantité quelconque $A+B$, dans laquelle A est rationel, & B un radical du second dégré.

Nous remarquerons d'abord que la racine cube d'une quantité de cette nature, ne peut pas renfermer plus d'un radical du second dégré; car on voit bien que le cube d'une quantité qui contiendroit deux de ces radicaux, telle que $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ donneroit au moins deux radicaux.

Méthode pour trouver la racine cube des quantités en partie commensurables, & en partie incommensurables.

Nous remarquerons ensuite que la même racine cube cherchée ne pourra pas contenir d'autre espece de radicaux, à moins que ce ne soit un radical cube, & qu'il ne soit commun aux deux parties de la racine, telle que seroit la quantité $f\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{g}\times\sqrt{m}$ dont le cube $mf^3+3mfg+3mff+mg\sqrt{g}$, ainsi que la quantité proposée $A+B$, a une partie commensurable, & une partie radicale du second dégré.

Cela posé, soit pris $p+q$ pour exprimer la racine cherchée, q étant la partie affectée du radical du second dégré, soit qu'il soit d'ailleurs ainsi que p affecté d'un radical cube, soit qu'ils ne le soient ni l'un ni l'autre.

Il est évident que le cube $p^3+3p^2q+3pq^2+q^3$ ne contiendra pas d'autre radical que le radical du second dégré qui est dans q, & qu'il n'y aura que les termes $3ppq$ & q^3 qui soient affectés de ce radical. On comparera donc ces deux termes à la quantité donnée B, & les deux autres à A; ce qui donnera les

Equations $A=p^3+3pq^2$ & $B=3p^2q+q^3$.

Pour réſoudre ces deux Equations, il faut d'abord commencer par chaſſer l'une des deux inconnues p ou q, ce qui ſe peut faire aiſément par les principes établis dans la ſeconde Partie, art. XXXIII. Mais on peut abreger le calcul par le ſecours d'une remarque qui a dû ſe preſenter facilement à des Algébriſtes un peu exercés, c'eſt que $AA-BB$ ſera toujours le cube de $pp-qq$, lorſque $A+B$ ſera le cube de $p+q$. Car $p+q$ étant la racine cube de $p^3+3pq^2+3p^2q+q^3$, dont la premiere partie p^3+3pq^2 eſt A, & la ſeconde $3p\ q+q^3$ eſt B, $p-q$ eſt néceſſairement la racine cube de $A-B$ qui eſt alors $p^3+3pq^2-3p\cdot q-q^3$; & par conſéquent $pp-qq$ ou $\overline{p-q}\times\overline{p+q}$ eſt $\sqrt[3]{A+B}\times\sqrt{A-B}$, c'eſt-à-dire $\sqrt[3]{AA-BB}$

Cela poſé, on a donc l'Equation $\sqrt[3]{A^2-B^2}=p^2-q^2$ ou $n=p^2-q^2$, dans laquelle n eſt donnée, & ne peut être qu'une quantité commenſurable ou un ſimple radical cube.

De l'Equation $n=p^2-q^2$ ou $q=p^2-n$, & de l'Equation $A=p^3+3pq^2$, on tire tout de ſuite $4p^3-3pn-A=0$, Equation qu'il faut réſoudre pour avoir la premiere partie p de la racine cube cherchée. Auſſi-tôt qu'elle ſera réſolue, on aura la ſeconde partie de cette même racine cube cherchée en employant l'Equation $q=\sqrt{p\ -n}$.

Quant au ſigne radical il ſera poſitif, ſi le radical de la propoſée a le ſigne $+$, & de même

même négatif si le radical de la proposée a le signe —. Car on voit aisément que la partie radicale du cube de $p+q$, laquelle est .... $\overline{3pp+qq}\times q$ sera toujours du même signe que q.

Si la racine de la quantité proposée $A+B$ ne doit point avoir de radical cube qui affecte tous ses termes, n ou $\sqrt[3]{A^2-B^2}$ sera une quantité commensurable, & par conséquent l'Equation $4p^3-3pn-A$ ne contiendra pas de radicaux, & comme p sera alors commensurable, on ne pourra pas manquer de le trouver en cherchant tous les diviseurs de cette Equation par la méthode donnée dans la IIIeme Partie art. XXXII.

Si la racine cherchée doit avoir ses deux parties affectées d'un radical cube, ce qu'on aura reconnu en ne trouvant point un cube parfait pour A^2-B^2, on verra quelle est la quantité par laquelle il faudroit multiplier la quantité proposée pour en former une nouvelle dont les deux parties étant prises pour A & pour B donneroient pour $AA-BB$ un cube parfait. Trouvant alors la racine cube de cette nouvelle quantité substituée à la proposée, il ne faudroit plus que la diviser par la racine cube du multiplicateur dont on se seroit servi, & l'on auroit la racine cherchée.

Quant à la détermination de ce multiplicateur, elle sera facile en remarquant que la question est la même que si on se proposoit de trouver la quantité quarrée, par laquelle

il faudroit multiplier la quantité qu'on a trouvé d'abord pour $AA - BB$ afin d'en faire un cube parfait ; car il est clair que la racine quarrée de ce multiplicateur de $AA - BB$ seroit le multiplicateur qu'on devroit donner aux quantités proposées A & B.

XXXII.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Pour montrer l'application de cette méthode, supposons qu'on cherche la racine cube de la quantité $7a^3 - 3a^2b + \overline{5aa - ab}\sqrt{\overline{2aa - ab}}$.

Par la comparaison de cette quantité avec $A + B$ j'ai $7a^3 - 3a^2b = A$; $\overline{5aa - ab}\sqrt{\overline{2aa - ab}} = B$, & partant $A^2 - B^2 = -a^6 + 3a^5b - 3a\,b^2 + a^3b^3$, & n ou $\sqrt[3]{A^2 - B^2} = -aa + ab$. Substituant cette valeur de n, ainsi que celle de A dans l'Equation $4p^3 - 3pn - A = 0$, j'ai $4p^3 + 3paa - 3pab - 7a^3 + 3a^2b$ dont il est question de trouver un diviseur d'une dimension. On trouvera facilement par la méthode enseignée dans la IIIeme Partie, article XXXII. que ce diviseur est $p - a$, c'est-à-dire que la valeur de p est a. Substituant cette valeur de p dans l'Equation $q = \sqrt{pp - n}$, il vient $q = \sqrt{2aa - ab}$.

Donc la racine cherchée est $a + \sqrt{2aa - ab}$.

XXXIII.

Autre exemple.

Soit présentement proposé de prendre la

racine cube de $2aac - abc - bbc - \overline{2a - b}$ $\sqrt{aacc - bbcc}$, je commence par faire $2aac - abc - bbc = A$ & $B = -\overline{2a - b}$ $\sqrt{aacc - b^2cc}$, ce qui me donne $A^2 - B^2 = 2a^4cc - 2ab^3cc$ qui n'eſt point un cube. Pour ſçavoir ce qui peut le rendre cube, je le décompoſe en ſes produiſans, & il devient $2\times cc\times\overline{b - a}\times b^3$; d'où je découvre aiſément qu'en le multipliant par $\frac{4\times\overline{b-a}^2}{cc}$ qui eſt une quantité quarrée, j'aurai un cube parfait, celui de $2\times\overline{b - a}\times b$ ou de $2bb - 2ab$; & par conſéquent que ſi on multiplie la quantité propoſée par $\frac{2b-2a}{cc}$ racine du quarré..... $\frac{4\times\overline{b-a}^2}{cc}$, on aura une nouvelle quantité.... $\overline{2aa - ab - bb}\times\overline{2b - 2a} - \overline{2a - b}\times\overline{2b - 2a}$ $\sqrt{aa - bb}$, dont la premiere partie repréſentant A, & la ſeconde B donnera pour...... $\sqrt[3]{AA - BB}$, c'eſt-à-dire pour n, $2bb - 2ab$. Je ſuppoſe donc que l'on m'eût en effet donné ces quantités pour A & pour B, & que j'en euſſe tiré cette valeur de n. Dans ce cas l'Equation $4p^3 - 3pn - A$ donneroit $4p^3 - 3p\times\overline{2bb - 2ab} + \overline{bb + ab - 2aa}\times\overline{2b - 2a} = 0$, à laquelle on trouveroit par la méthode donnée dans la IIIeme Partie, article XXXII. le diviſeur $p + a - b$, c'eſt-à-dire que la valeur de p ſeroit alors $b - a$; la ſubſtituant dans

$q = \sqrt{pp - n}$ on auroit $q = \sqrt{aa - bb}$, donc $b - a - \sqrt{aa - bb}$ feroit la racine cube de la nouvelle quantité, où ce qui revient au même du produit de la quantité propofée par $\frac{2b - 2a}{c}$. Donc $\frac{\overline{b - a - \sqrt{aa - bb}} \times \sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{2b - 2a}}$ eft la racine cube cherchée de la quantité propofée.

Dans cet exemple & dans tous ceux où la racine cherchée fe trouvera affectée de radicaux cubes, il eft clair qu'on ne fçauroit, pour fe difpenfer d'employer la méthode précédente, avoir recours à la méthode de la IIIeme Partie, article XXXVI. c'eft-à-dire qu'on ne pourra trouver aucun divifeur dans l'Equation dont la folution auroit conduit à donner pour valeur d'x la racine cube cherchée. En effet il eft aifé de voir que l'Equation .. $x^6 - 2x^3 \times \overline{2aac - abc - bbc} + 2b^4cc - 2ab^3cc$ qui auroit donné .... $x = \sqrt[3]{2aac - abc - bbc - \overline{2a - b}\sqrt{aacc - bbcc}}$ n'auroit point été décompofable.

Mais dans tous les cas où la racine cherchée doit être fimplement compofée d'un terme rationel & d'un irrationel du fecond dégré, on parviendroit toujours à trouver cette racine en décompofant l'Equation dont la folution auroit conduit à chercher la racine cube de la quantité propofée. Dans l'article XXXII. par exemple, où il étoit queftion de réduire l'expref-

sion $x = \sqrt[3]{7a^3 - 3a^2b + 5aa - ab\sqrt{2aa - ab}}$ on auroit pû trouver dans l'Equation ..... $x^6 + \overline{6ab - 14a^3} \times x - a^6 + 3a^5b - 3a^4b^2 + a^3b^3 = 0$ d'où feroit venue cette valeur de x, une Equation du fecond dégré $xx - 2ax + ab - aa = 0$ qui auroit donné la même valeur de x.

XXXIV.

Si les termes de la quantité dont on voudra prendre la racine cube ont des divifeurs, on commencera par les mettre tous au même dénominateur, & on divifera enfuite la racine cube du numérateur par celle du dénominateur.

XXXV.

Lorfque la quantité propofée en partie commenfurable & en partie incommenfurable fera feulement numérique, on pourra trouver fa racine cube plus aifément que par la méthode précédente.

Méthode pour trouver les racines cubes des quantités numériques en partie commenfurables, &c.

Car, fuppofant d'abord que la racine cherchée ne doive point avoir de radical cube, mais qu'elle foit compofée d'un nombre entier & d'une partie radicale fimple & entiere auffi, on tire de ce que $p - q$ eft $\sqrt[3]{A - B}$ lorfque $p + q$ eft $\sqrt[3]{A + B}$ ou ce qui revient au même de ce que $p = \frac{\sqrt[3]{A - B} + \sqrt[3]{A + B}}{2}$

une maniere simple d'avoir la partie commensurable de la racine cherchée, il ne faut pour cela que calculer en nombres entiers les plus proches les quantités $\sqrt[3]{A - B}$ & $\sqrt[3]{A + B}$, & prendre ensuite la moitié de ces deux nombres pour avoir la valeur exacte de p. Car en prenant pour $\sqrt[3]{A - B}$ & pour $\sqrt[3]{A + B}$ les nombres entiers qui en approchent le plus, l'erreur qu'on peut commettre sur chacune de ces quantités ne sçauroit être de $\frac{1}{2}$, & par conséquent il ne peut pas arriver que le nombre entier qui en résulte pour $\frac{\sqrt[3]{A-B} + \sqrt[3]{A+B}}{2}$, c'est-à-dire pour p, différe d'une unité de la vraye valeur de p, & comme cette vraye valeur de p doit être un nombre entier, elle sera donc exactement déterminée par ce moyen.

Ayant ainsi la valeur de p, & sçachant déja celle de n ou de $\sqrt[3]{AA - BB}$, on substituera, comme dans la méthode précédente les valeurs de p & de n dans $q = \sqrt[3]{pp - n}$, & l'on aura la seconde partie de la racine cube cherchée.

Si la racine cherchée doit avoir ses deux termes affectés d'un même radical cube, ce qu'on aura reconnu en remarquant que $A^2 - B^2$ n'étoit pas un cube parfait; il faudra en suivant la même méthode que celle qu'on a employée dans les quantités littérales, chercher le nombre par lequel on devroit multiplier $A + B$ afin que $AA - BB$ fut un cube parfait:

& ayant trouvé la racine de la nouvelle quantité que devient $A+B$ par cette multiplication, on n'aura qu'à la diviser par la racine cube du nombre dont on s'est servi pour multiplier $A+B$, & le quotient sera la racine cherchée.

XXXVI.

Supposons, pour montrer l'application de cette méthode, qu'on cherche la racine cube de $7+5\sqrt{2}$. Ayant fait $A=7$, $B=5\sqrt{2}$, je trouve que n ou $\sqrt[3]{A^2-B^2}=-1$. Je remarque ensuite que la valeur de $\sqrt[3]{A+B}$ ou de $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$ est plus proche de 2 que de 3, ainsi je prends 2 pour l'exprimer; remarquant de même que celle de $\sqrt[3]{A-B}$ ou de $\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ est entre 0 & 1, mais plus proche de 0, je prends 0 pour cette quantité, & j'ai par ce moyen p ou $\frac{\sqrt[3]{A+B}+\sqrt[3]{A-B}}{2}=1$ Je substitue alors cette valeur de p dans $q=\sqrt{pp-n}$, & j'ai $q=\sqrt{2}$, d'où je conclus que si la quantité proposée $7+5\sqrt{2}$ a une racine cube, elle est $1+\sqrt{2}$, en effet cubant $1+\sqrt{2}$ il vient $7+5\sqrt{2}$.

Application de la méthode précédente à un exemple.

XXXVII.

Supposons présentement qu'on eut à prendre la racine cube de $5+3\sqrt{3}$; on trouve-

Autre exemple.

roit alors $AA - BB = -2$, or 2 n'étant point cube il faut chercher le nombre par lequel il auroit fallu multiplier $5+3\sqrt{3}$ pour que $AA-BB$ eut été cube, ou ce qui revient au même il faut chercher le nombre le plus simple par le quarré duquel $AA-BB$, c'est-à-dire 2, étant multiplié on aura un cube. Or on voit tout de suite que 2 est lui-même ce nombre. Supposons donc que l'on se fut proposé de trouver la racine cube de $10+6\sqrt{3}$. On auroit eu alors $n=-2$ & $\frac{\sqrt[3]{A+B}+\sqrt[3]{A-B}}{2}$ ou $\frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}}{2}$ auroit été 1 en nombre entier le plus proche. Je substitue donc ces valeurs de p & de n dans $q=\sqrt{pp-n}$, & j'ai $q=\sqrt{3}$. J'examine maintenant si $p+q$ ou $1+\sqrt{3}$ est la racine cube de $10+6\sqrt{3}$, & je trouve qu'elle l'est en effet. D'où je conclus que $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ est la racine cube cherchée de $5+3\sqrt{3}$.

XXXVIII.

Simplication de la méthode précédente.

On simplifiera le calcul d'approximation par lequel on détermine p, en remarquant qu'au lieu de $\frac{\sqrt[3]{A+B}+\sqrt[3]{A-B}}{2}$, on peut écrire …

$$\frac{\sqrt[3]{A+B}+\frac{n}{\sqrt[3]{A+B}}}{2}$$

à cause que n ou $\sqrt[3]{AA-BB}$

$= \sqrt[3]{A - B} \times \sqrt[3]{A + B}$. Or cette expreſſion eſt en effet plus ſimple que $\frac{\sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}}{2}$ parce qu'il eſt plus aiſé de diviſer par $\sqrt[3]{A+B}$ le nombre n, qui eſt ſuppoſé déja trouvé, que de calculer ſéparement $\sqrt[3]{A-B}$.

XXXIX.

Pour montrer l'uſage de cette nouvelle formule ; appliquons-là à l'exemple de l'article XXXVI. ou A étoit $= 7$, & $B = 5\sqrt{2}$; après avoir trouvé de même que dans cet article que $n = -1$ & qne $\sqrt[3]{A+B}$ en nombres entiers les plus proches étoit 2, au lieu de chercher comme dans le même article la racine cube approchée de $7 - 5\sqrt{2}$, je diviſe n ou -1 par la valeur 2 de $\sqrt[3]{A+B}$ ce qui me donne $-\frac{1}{2}$ que je ſubſtitue dans la formule précédente $\frac{\sqrt[3]{A+B} + \frac{n}{\sqrt[3]{A+B}}}{2}$, & j'ai $\frac{2 - \frac{1}{2}}{2}$ ou 1 (prenant le nombre entier le plus proche) pour la valeur de p, ainſi qu'on l'avoit trouvé dans cet article par la formule $\frac{\sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}}{2}$, le reſte s'acheveroit de même.

Application de la nouvelle méthode.

XL.

Cette nouvelle méthode pourroit etre fautive dans les cas où A & B sont de signes différens.

Il est à remarquer cependant que cette nouvelle formule pourroit induire en erreur si A & B n'étoient pas de même signe, car dans les cas où ces quantités seroient des signes différens, la vraye valeur de $\sqrt[3]{A+B}$ pourroit être si petite auprès de n, que le nombre entier le plus proche qu'on prend à la place de cette valeur donneroit pour $\frac{\sqrt[3]{A+B}+\frac{n}{\sqrt[3]{A+B}}}{2}$ un nombre qui différoit du vrai d'une ou de plusieurs unités. Qu'on eut, par exemple, à prendre la racine cube de $45-29\sqrt{2}$ en faisant $A=45$ & $B=-29\sqrt{2}$, on auroit 1 pour le nombre entier le plus proche de... $\sqrt[3]{A+B}$ ou $\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ & comme.... $\sqrt[3]{AA-BB}$ seroit alors 7, p ou ......

$\frac{\sqrt[3]{A+B}+\frac{n}{\sqrt[3]{A+B}}}{2}$ seroit en ce cas trouvé égal à 4, quoi qu'il ne fût réellement que 3, ainsi qu'on peut voir par l'expression ...... $\frac{\sqrt[3]{A+B}+\sqrt{A-B}}{2}$ de la méthode précédente.

Ce qu'il faut faire en ce cas.

Mais pourvû que cette nouvelle méthode d'avoir p, soit d'un usage sûr toutes les fois

que A & B sont de même signe, il importe peu qu'elle s'applique aux cas où ces quantités sont de signes differens. Car on voit bien que dans ces cas on n'a qu'à commencer par supposer A & B tous deux positifs, & en prendre la racine $p+q$. Ensuite faire p du même signe que A, & q du même signe que B.

Il ne s'agit donc plus que de s'assurer si toutes les fois que A & B sont de même signe, ou ce qui revient au même si A & B étant tous deux positifs, on peut, sans craindre d'erreur, substituer dans $\dfrac{\sqrt[3]{A+B} + \dfrac{n}{\sqrt[3]{A+B}}}{2}$ à la place de $\sqrt[3]{A+B}$ le nombre entier le plus proche. Pour nous en convaincre, commençons par supposer, ce qui ne peut jamais aller si loin, qu'on se trompât de $\frac{1}{2}$ en prenant pour $\sqrt[3]{A+B}$ le nombre entier le plus proche. Dans ce cas la quantité qu'on trouveroit au lieu de p seroit.. $\dfrac{\sqrt[3]{A+B} \pm \frac{1}{2} + \dfrac{n}{\sqrt[3]{A+B} \pm \frac{1}{2}}}{2}$. Pour faire voir que cette expression ne sçauroit donner un nombre qui differe d'une unité de la vraye valeur de p, mettons dans cette quantité $p+q$ au lieu de $\sqrt[3]{A+B}$, & $pp-qq$ au lieu de n, elle deviendra $p+q \pm \frac{1}{2} + \dfrac{pp-qq}{p+q \pm \frac{1}{2}}$ de laquelle

retranchant p on tire en réduisant $\frac{\pm q + \frac{1}{4}}{2p + 2q \pm 1}$ pour l'erreur que peut apporter, dans la détermination de p, le choix qu'on a fait du nombre entier au lieu de $\sqrt[3]{A+B}$. Or il est clair que cette quantité ne sçauroit jamais égaler $\frac{1}{2}$, car dans la premiere expression $\frac{q + \frac{1}{4}}{2p + 2q + 1}$ qu'elle renferme, le numérateur $q + \frac{1}{4}$ étant plus petit que la moitié de $2q + 1$, est à plus forte raison plus petit que la moitié de $2p + 2q + 1$: & dans la seconde expression $\frac{-q + \frac{1}{4}}{2p + 2q - 1}$ qu'elle renferme encore, le numérateur $-q + \frac{1}{4}$ étant plus petit que la moitié de $2q$ est par conséquent plus petit aussi que la moitié de $2q + 2p - 1$.

Ainsi on ne sçauroit se tromper d'une unité en déterminant p par la méthode précédente, & par conséquent toutes les fois qu'une quantité comme $A + B$, dans laquelle il n'entrera, soit sous le signe radical, soit devant ce signe, aucun nombre fractionnaire devra avoir une racine cube $p + q$, dans laquelle il n'y ait aussi aucun nombre fractionnaire, on trouvera cette racine par la méthode précédente.

XLI.

Cas où la méthode précédente pourroit induire dans l'erreur.

Mais si la quantité $A+B$, quoique ne contenant que des nombres entiers, soit dehors, soit dessous le signe radical, devoit avoir une racine cube qui contint des nombres fractionaires, telle que la quantité $2+\sqrt{5}$ dont la

racine cube eſt $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$ la méthode précédente auſſi-bien que celle de l'art. XXXV. ne donneroit rien alors, & jetteroit dans l'erreur en faiſant croire qu'il n'y auroit point de racine cube à eſpérer.

Pour remédier à cet inconvenient, il faut commencer par chercher directement quelles ſont toutes les eſpeces de racines fractionaires dont les cubes pourroient être des nombres entiers. Moyen de s'en garentir.

Pour les trouver ſoient repréſentées toutes ces racines par $\frac{p}{m}+\frac{q}{n}$, p & m étant ſuppoſés des nombres entiers qui n'ont aucun commun diviſeur, q la racine d'un nombre en entier qui ne permet aucune réduction avec le nombre n. En élevant cette quantité au cube on aura $\frac{p^3}{m^3}+\frac{3pq^2}{mnn}$ pour la partie rationelle ; & $\frac{3pp}{nmm}+\frac{qq}{n^3}\times q$ pour la partie incommenſurable. De plus par les conditions du Problême que nous cherchons à réſoudre, tant la premiere quantité $\frac{p^3}{m^3}+\frac{3pq^2}{mnn}$, que le coefficient $\frac{3pp}{nmm}+\frac{qq}{n^3}$ de la ſeconde doivent être des nombres entiers.

Soit d'abord égalé $\frac{3p^2}{mmn}+\frac{qq}{n^3}$ à b que je ſuppoſe exprimer un nombre entier. On aura

quantité par 8, & chercher par la même méthode la racine cube de la nouvelle quantité qu'on aura par cette multiplication, & si on ne réussit pas, on sera sûr que la quantité proposée n'étoit pas un cube, si on réussit la moitié de la racine cube qu'on aura alors, sera celle qu'on cherchoit.

XLII.

Lorsque le nombre *A* & le radical *B* seront fractionnaires, il est clair qu'il faudra ainsi que dans l'article XXXIV. mettre *A* & *B* au même dénominateur, puis diviser la racine cube du numérateur par celle du dénominateur.

XLIII.

Si on proposoit de prendre la racine cube d'une quantité composée de deux radicaux du second dégré, soit que cette quantité fut numérique ou qu'elle fut littérale, il n'y auroit qu'à la multiplier par le cube de l'un des radicaux que contiendroit cette quantité. Le produit étant alors dans le cas des quantités qu'on vient de traiter, on en prendroit la racine cube de la même maniere, & on la diviseroit par le radical dont le cube auroit servi de multiplicateur à la proposée.

Ce qu'il faut faire quand la racine cube doit être la somme de deux radicaux.

XLIV.

Lorsqu'on voudra prendre la racine quatriéme d'une quantité comme $A+B$, on n'aura d'abord qu'à en chercher la racine quarrée, car

Comment on prend la racine quatriéme des quantités de

même espece que les précédentes.

si on n'en trouve pas, à plus forte raison n'en trouvera-t'on pas de racine quatriéme ou quarrée quarrée. Si on en trouve une, il ne sera plus question que de trouver la racine quarrée de la quantité que la premiere extraction aura donnée.

XLV.

Ce qu'il faut faire toutes les fois que l'exposant de la racine est pair.

Il en sera de même toutes les fois qu'on aura une racine à prendre dont l'exposant sera pair, il faudra commencer par la racine quarrée, & le Problême sera réduit à prendre une racine d'un exposant sous-double du premier.

XLVI.

Pour les racines cinquiémes.

Si on vouloit la racine cinquiéme d'une quantité $A+B$ telle que les précédentes, il faudroit suivre une méthode semblable à celle qu'on a suivie pour la racine cube. Au lieu des deux théorêmes, par lesquels on apprenoit que $p=\frac{\sqrt[3]{A+B}+\sqrt[3]{A-B}}{2}$, & que $\sqrt[3]{A^2-B^2}=p^2-q^2$, on auroit ceux-ci .... $p=\frac{\sqrt[5]{A+B}+\sqrt[5]{A-B}}{2}$ & $\sqrt[5]{A^2-B^2}=p^2-q^2$ dont on feroit le même usage que des précédens.

XLVII.

Il en seroit de même pour les racines plus élevées. Que m soit l'exposant de la racine qu'on

qu'on se propose de prendre de $A+B$; on aura ces deux théorêmes $p = \frac{\sqrt[m]{A+B}+\sqrt[m]{A-B}}{2}$ & $\sqrt[m]{A^2-B^2} = p^2 - q^2$, qu'on employera encore de la même maniere que dans les racines cubes.

Pour démontrer ces théorêmes en général, il ne sera question que de faire voir que si $A+B$ est la puissance m de $p+q$, $A-B$ sera celle de $p-q$, car il suivra de-là nécessairement que $\sqrt[m]{A+B} \times \sqrt[m]{A-B}$ sera $\overline{p+q} \times \overline{p-q}$ ou $pp-qq$, & que .... $\frac{\sqrt[m]{A+B}+\sqrt[m]{A-B}}{2}$ sera $\frac{p+q+p-q}{2}$ ou p.

Quant à la démonstration de ce que $A-B$ est la puissance m de $p-q$, lorsque $A+B$ est celle de $p+q$, elle seroit aisée à trouver si on vouloit y arriver par l'induction. Car en donnant successivement différentes valeurs particulieres à m, & reconnoissant la vérité de ce théorême dans chaque cas particulier, on en concluroit la vérité en général. Mais on sent bien qu'on ne sçauroit se contenter d'une pareille maniere de démontrer, qu'au cas que l'on ne pût pas trouver une expression générale pour la puissance m de $p+q$, & pour celle de $p-q$, il faut donc chercher cette expression générale, qui d'ailleurs doit exciter la curiosité de tous les Analystes.

XLVIII.

De la maniere d'élever un binome à une puissance quelconque.

Pour parvenir à trouver la valeur générale de $\overline{p+q}^{m}$ ou de $p+q$ multiplié par lui-même autant de fois moins une que l'unité est contenue dans m, commençons par chercher dans ce que nous avons vû précédemment ce qui peut avoir du rapport avec cette opération. Reprenons dans cette vûe ce que nous avons dit dans la IIIeme Partie article II. où nous avons formé une Equation par le produit de ses racines $x+a$, $x+b$, $x+c$, &c. & où nous avons trouvé la loi suivant laquelle devoient être composés tous les termes de ce produit, il est aisé de voir que tout ce que nous avons dit alors pourra s'appliquer au cas présent, en supposant que toutes les racines sont égales. Or ce que nous avons dit IIIeme Partie article III. sur l'Equation dont les racines sont $x+a$, $x+b$, $x+c$, &c. consistoit en ceci.

1°. Que le premier terme de cette Equation étoit composé de x élevé à une puissance égale au nombre des racines.

2°. Que le second terme étoit composé de x élevé à une puissance moindre d'une unité, & ayant pour coefficient la somme des racines.

3°. Que le troisiéme terme étoit composé de x élevé à une puissance moindre de deux unités, & ayant pour coefficient la somme de tous les produits des racines prises deux à deux.

4°. Que le quatriéme terme étoit composé de x élevé à une puissance moindre de trois unités, & ayant pour coefficient la somme de tous les produits des racines prises trois à trois, &

ainſi des autres termes.

Si on applique donc ces remarques dans le cas préſent où toutes les racines ſont égales, & où leur nombre eſt exprimé généralement par m, on verra

Que le premier terme ſera x^{m};

Que le ſecond ſera x^{m-1} multiplié par ma, puiſque toutes les racines ſont égales à a, & que leur nombre eſt m;

Que le troiſiéme terme ſera x^{m-2} avec un coefficient égal à a^2, pris autant de fois qu'il y aura de rectangles ab, ac, bc, &c. dans le coefficient du troiſiéme terme de l'Equation donnée par le produit des racines $x+a$, $x+b$, &c. dont le nombre eſt ſuppoſé m; puiſque tous les produits ab, ac, bc, &c. doivent tous être égaux chacun à a^2, lorſque b, c, &c. ſont égaux à a;

Que le quatriéme terme ſera x^{m-3} avec un coefficient égal à a^3, pris autant de fois qu'il y aura de produits abc, abd, acd, bcd, &c. dans le coefficient du quatriéme terme de l'Equation dont le nombre des racines $x+a$, $x+b$, $x+c$, &c. eſt m, & ainſi des autres termes.

La queſtion eſt donc réduite maintenant à ſçavoir ce qu'un nombre m de lettres peut donner de produits ab, ac, bc, &c. priſes deux à deux; de produits abc, abd, bcd, acd, &c. priſes trois à trois; de produits $abcd$, $abde$, $abce$, $acde$, $bcde$, &c. priſes quatre à quatre,

&c. Car en ſuppoſant que ces nombres ſoient trouvés, & qu'on les exprime par A, B, C, D, &c. ..... $x^m + max^{m-1} + Aa^2x^{m-2} + Ba^3x^{m-3} + Ca^4x^{m-4} + Da^5x^{m-5} +$ &c. ſera la valeur cherchée de $\overline{x+a}^m$.

Pour trouver premierement ce qu'un nombre m de lettres a, b, c, &c. peut donner de produits de deux lettres ab, ac, bc, &c. en les combinant de toutes les manieres poſſibles; commençons par remarquer que lorſqu'on aura formé tous ces produits, on aura écrit deux fois plus de lettres que de termes.

Remarquons enſuite que chacune des lettres a, b, c, &c. doit être répetée le même nombre de fois, & que chacune ne pouvant être multipliée que par toutes les autres, & non par elle-même, ne ſçauroit être répetée que $m-1$ de fois, donc le nombre de lettres à écrire en formant tous ces produits doit être $m \times \overline{m-1}$, donc le nombre de tous ces produits doit être $\frac{m \times \overline{m-1}}{2}$, & c'eſt-là la valeur de A ou du coefficient du troiſiéme terme de la formule cherchée.

Quant au coefficient du quatriéme terme, c'eſt-à-dire au nombre de produits à trois lettres abc, abd, acd, bcd, &c. que peuvent donner un nombre m de lettres a, b, c, d, &c. priſes de toutes les manieres poſſibles trois à trois, pour le trouver, nous remarquerons d'a-

bord que ce nombre doit être le tiers de celui des lettres qu'on écrit en formant tous ces produits.

Nous remarquerons ensuite que chacune de ces lettres doit être répetée le même nombre de fois, & que ce nombre doit être celui qui exprime combien de produits de deux lettres doivent donner toutes les autres lettres. Car il est évident que chaque lettre, *a* par exemple, doit être jointe à tous les produits *bc*, *bd*, *cd*, &c. des autres lettres prises deux à deux.

Le nombre de fois que chacune des lettres *a*, *b*, *c*, *d*, &c. doit être répetée est donc celui qu'un nombre $m-1$ de lettres *b*, *c*, *d*, &c. donne de produits de deux lettres. Mais on vient de voir que lorsque le nombre des lettres étoit m, le nombre de leurs produits deux à deux étoit la moitié du nombre m multipliée par le nombre $m-1$ qui est moindre d'une unité, donc lorsque le nombre des lettres est $m-1$, il faut encore prendre la moitié $\frac{m-1}{2}$ de ce nombre, & la multiplier par $m-2$ qui est moindre d'une unité que $m-1$. C'est-à-dire que $\frac{\overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2}$ est le nombre de fois que chacune des lettres *a*, *b*, *c*, &c. sera répetée dans tous les produits en question, & comme le nombre de ces lettres est m, $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2}$ sera par conséquent le nombre de toutes les lettres écrites, donc le nombre cherché des

produits à trois lettres *abc*, *abd*, &c. sera

$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3}$, & c'est-là la valeur de *B*

ou du coefficient du quatriéme terme.

A l'égard du coefficient *C* du cinquiéme, c'est-à-dire du nombre de produits de quatre lettres que doit donner le nombre *m* de lettres, on trouvera de même qu'il doit être

$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3 \times 4}$, parce que ce

nombre doit être le quart de toutes les lettres écrites dans ces produits, que chacune de ces lettres doit être répétée le même nombre de fois, & combinée avec tous les produits de trois lettres que donne le nombre $m-1$ de lettres, & que ces produits de trois lettres donnés par le nombre $m-1$ de lettres doit être....

$\frac{\overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3}$, par la même rai-

son que $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3}$ est celui des produits de trois lettres que fournit le nombre *m* de lettres.

Formant de même tous les autres coefficiens & substituant ensuite dans la formule précédente à la place de *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c. ainsi trouvées, on aura enfin $x^m + max^{m-1} +$

$$m\times\frac{\overline{m-1}}{2}a^2x^{m-2}+\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{2\times3}a^3x^{m-3}$$

$$+\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}}{2\times3\times4}a^4x^{m-4}+$$

$$\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}\times\overline{m-4}}{2\times3\times4\times5}a^5x^{m-5}+$$

&c. pour la puissance m de $x+a$.

Par la même raison la valeur de $\overline{p+q}^m$ dont on avoit besoin article XLVII. sera

Formule générale pour l'élévation de $p+q$ à la puissance m.

$$p^m+mqp^{m-1}+\frac{m\times\overline{m-1}}{2}q^2p^{m-2}$$

$$+\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{2\times3}q^3p^{m-3}+\text{\&c.}$$

XLIX.

Quant à celle de $\overline{p-q}^m$, il est évident que pour la trouver, il ne faudra que faire q négatif dans cette formule, ce qui la changera en

$$p^m-mqp^{m-1}+\frac{m\times\overline{m-1}}{2}q^2p^{m-2}$$

$$-\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{2\times3}q^3p^{m-3}+\text{\&c.}$$

L.

Si on veut présentement démontrer le théo- Démonstra-

tion du théorème de l'article XLVII.

rême de l'article XLVII. on commencera par remarquer que A est la somme de tous les termes p^{m}, $+\frac{m\times\overline{m-1}}{2}q^{2}p^{m-2}$,

$+\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}}{2\times3\times4}q^{4}p^{m-4}$, &c. dans lesquels il n'entre aucune dimension impaire de q, & que B est la somme de tous les termes mqp^{m-1}, $\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{2\times3}q^{3}p^{m-3}$,

$\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}\times\overline{m-4}}{2\times3\times4\times5}q^{5}p^{m-5}$

&c. où q ne se trouve jamais qu'à une dimension impaire.

On verra ensuite que $A+B$ est la premiere formule, & $A-B$ la seconde, ce qui étoit le point où la difficulté étoit réduite, art. XLVII.

LI.

Application de la formule précédente à un exemple.

Lorsqu'on voudra employer la formule précédente à élever un binome quelconque à une puissance donnée, rien ne sera plus facile ; on n'aura qu'à substituer dans la valeur précédente de $\overline{p+q}^{m}$ à la place de p le premier terme du binome donné, à la place de q le second, & à la place de m l'exposant de la puissance à laquelle on veut élever le binome proposé. Qu'on se propose, par exemple d'élever $3ac-2bd$ à

la cinquiéme puissance, je fais

$$3ac = p$$
$$-2bd = q$$
$$5 = m$$

& j'ai d'abord $p^m = \overline{3ac}^5 = 243a^5c^5$.

$$mqp^{m-1} = 5 \times -\overline{2bd} \times \overline{3ac}^4$$
$$= -810a^4bc^4d.$$

$$\frac{m \times \overline{m-1}}{2} q^2 p^{m-2} = 10 \times 4bbdd \times \overline{3ac}^3$$
$$= 1080a^3bbc^3dd.$$

$$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3} q^3 p^{m-3} = 10 \times \overline{-2bd}^3$$
$$\times \overline{3ac}^2 = -720a^2b^3c^2d^3.$$

$$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3 \times 4} q^4 p^{m-4} = 5 \times \overline{-2bd}^4$$
$$\times \overline{3ac} = 240ab^4cd^4.$$

$$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}}{2 \times 3 \times 4 \times 5} q^5 p^{m-5}$$
$$= 1 \times \overline{-2bd}^5 \times \overline{3ac}^0 = -32b^5d^5.$$

A l'égard des autres termes, leurs coefficiens ayant tous pour un de leurs produisans $m-5$ qui est zero par la supposition de $m=5$, ils doivent tous être nuls; ainsi $\overline{3ac-2bc}^5$ aura

pour valeur $245\, a^5 c^5 - 810\, a^4 bc^4 d + 1080\, a^3 b^2 c^3 d^2 - 720\, a^2 b^3 c^2 d^3 + 240 a^4 c d^4 - 32 b^5 d^5$.

LII.

Comment on applique la formule précédente aux quantités de plus de deux termes.

Lorſqu'on voudra élever, à une puiſſance donnée, une quantité compoſée de plus de deux termes, on le pourra encore facilement par la même méthode. Qu'il s'agiſſe, par exemple d'un trinome, en nommant p le premier terme de ce trinome, q la ſomme des deux autres, la difficulté de l'élevation du trinome ſera réduite à celle du binome, puiſque chacun des termes $mp^{m-1} q$, $\frac{m \times \overline{m-1}}{2} p^{m-2} q^2$ &c. ne renfermera pas de quantité à élever plus compoſée que des binomes.

Et lorſqu'on aura un polynome plus compoſé on réduira toujours la difficulté à l'élevation d'un polynome plus ſimple.

LIII.

Exemple.

Pour donner un exemple de la maniere dont on employe la formule précédente à l'élevation d'une quantité qui a plus de deux termes, ſoit propoſé d'élever $a+2b-c$ à la quatriéme puiſſance; on fera $m=4, p=a, q=2b-c$, & ſubſtituant ces valeurs dans la formule on aura $p^m = a^4$, $mqp^{m-1} = 4 \times \overline{2b-c} \times a^3 = 8a^3 b - 4a^3 c$.

$\frac{m \times \overline{m-1}}{2} q^2 p^{m-2} = 6 \times \overline{-b2c}^2 \times a^2 = 24a^2b^2$

$-24a^2bc + 6a^2c^2$,

$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3} q^3 p^{m-3} = 4 \times \overline{2b-c}^3 \times a$

$= 32ab^3 - 48abbc + 24abcc - 4ac^3$,

$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3 \times 4} q^4 p^{m-4}$

$= \overline{2b-c}^4 = 16b^4 - 4 \times \overline{2b}^3 \times c$

$+ \frac{4 \times 3}{2} \times \overline{2b}^2 \times c^2 - \frac{4 \times 3 \times 2}{2 \times 3} \times 2b \times c^3$

$+ \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 3 \times 4} c^4 = 16b^4 - 32b^3c + 24bbcc$

$-8bc^3 + c^4$,

& partant $\overline{a+2b-c}^4 = a^4 + 8a^3b -$
$4a^3c + 24a^2b^2 - 24a^2bc + 6a^2c^2 + 32ab^3$
$-48abbc + 24abcc - 4ac^3 + 16b^4$
$-32b^3c + 24bbcc - 8bc^3 + c^4$.

LIV.

Après avoir trouvé la formule précédente on ne pouvoit gueres tarder à ſoupçonner qu'elle devoit s'étendre à d'autres puiſſances que celles qui ſont des nombres entiers & po-

sitifs. Il suffisoit d'avoir reconnû qu'il y avoit d'autres puissances que celles-là pour vouloir y appliquer cette formule. Ayant reconnû, par exemple, qu'au lieu d'écrire $\sqrt[n]{a}$, on pouvoit mettre $a^{\frac{1}{n}}$, on aura imaginé aussi-tôt que lorsqu'on vouloit prendre la racine n d'une quantité complexe quelconque représentée par $p+q$, on n'avoit qu'à faire $m = \frac{1}{n}$ dans la formule précédente, ou ce qui revient au même, on aura pensé que $p^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} p^{\frac{1}{n}-1} q + \frac{\frac{1}{n} \times \frac{1}{n} - 1}{2} p^{\frac{1}{n}-2} q^2 +$ &c. devroit exprimer $\overline{p+q}^{\frac{1}{n}}$ ou la racine n de $p+q$.

De même on aura soupçonné qu'au lieu de $\frac{1}{\overline{p+q}^n}$ ou de $\overline{p+q}^{-n}$, on n'avoit qu'à faire $m = -n$ dans la même valeur de $\overline{p+q}^m$, ce qui donnoit . . . . $p^{-n} - n p^{-n-1} q - \frac{n \times \overline{-n-1}}{2} p^{-n-2} q^2 -$ &c. En un mot l'ordre & la généralité qu'on avoit toujours trouvé dans les opérations analytiques devoit faire penser que quoique la formule précédente n'eût été d'abord trouvée

qu'en ſuppoſant m entier & poſitif, elle pouvoit auſſi s'appliquer à toutes les autres valeurs de m. Mais ſi on trouvoit de la vraiſemblance à ce que cela fut ainſi, il s'en faut beaucoup qu'un Géometre put ſe contenter de cette vraiſemblance, tout l'effet qu'elle pouvoit faire ſur ſon eſprit étoit de l'engager à faire des efforts pour parvenir à une démonſtration. Voici une maniere de trouver cette démonſtration qu'il n'étoit pas bien difficile d'imaginer.

Où l'on fait voir que la formule précédente eſt encore bonne lorſque l'expoſant eſt fractionaire.

Soit propoſé premierement de faire voir que la formule en queſtion peut s'appliquer toutes les fois que m eſt une fraction quelconque poſitive ou ce qui revient au même, ſoit propoſé de prouver l'Equation A (voyez la Table I ci-jointe) laquelle devient l'Equation B en diviſant les deux membres par $p^{\frac{r}{n}}$ & en faiſant $\frac{q}{p} = z$.

Mais pour prouver l'Equation B, il ſuffit de faire voir qu'en élevant ſes deux membres à la même puiſſance n, il viendra des quantités égales, c'eſt-à-dire (en faiſant ....

$$s = \frac{r}{n} z + \frac{\frac{r}{n} \times \overline{\frac{r}{n} - 1}}{2} \times z^2$$

$$+ \frac{\frac{r}{n} \times \overline{\frac{r}{n} - 1} \times \overline{\frac{r}{n} - 2} +}{2 \times 3} \times z^3 \text{ \&c.})$$ qu'il s'agit de prouver l'Equation D.

Or comme r & n ſont deux nombres entiers on peut faire les élevations indiquées dans cette Equation par le moyen de la valeur générale de $\overline{p+q}^{\,m}$, ce qui donnera l'Equation *E*.

Le Problême étant réduit à prouver l'Equation *E*, il faut trouver par le moyen de la valeur de s, celles de s^2, s^3, s^4, &c. multiplier enſuite la valeur de s par n, celle de s^2 par $\frac{n \times \overline{n-1}}{2}$, celle de s^3 par $\frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}{2 \times 3}$, celle de s^4 par $\frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times \overline{n-3}}{2 \times 3 \times 4}$, &c. afin d'avoir les valeurs de tous les termes du ſecond membre de l'Equation *E*. Ces valeurs trouvées & écrites les unes ſous les autres, on formera l'Equation *F* qui, en faiſant les réductions que demande le ſecond membre, devient l'Equation *G* qui eſt la même que l'Equation *E*. Donc l'Equation *A* qui avoit donné cette Equation eſt prouvée. Donc il eſt vrai en général que la formule de l'art. XLVIII. s'applique auſſi-bien aux puiſſances fractionnaires quelconques poſitives qu'aux puiſſances entieres poſitives.

LV.

La même formule va encore aux puiſſances négatives.

Pour faire voir préſentement que la même formule s'applique également aux puiſſances négatives, ſoit entieres, ſoit fractionnaires, il s'agit de prouver (voyez la Table 2 ci-jointe) l'Equation *A* dont le ſecond membre eſt celui

que donne la formule de l'article XLVIII en faisant $m = -\frac{r}{n}$.

Il eſt évident qu'au lieu de prouver l'Equation *A* on peut ſe contenter de prouver l'Equation *B* qui revient au même que la premiere en faiſant $z = \frac{q}{p}$, & multipliant les deux membres par $p^{-\frac{r}{n}}$.

Il eſt évident de plus qu'au lieu de la quantité $\overline{1+z}^{-\frac{r}{n}}$, on peut mettre $\frac{1.}{\overline{1+z}^{\frac{r}{n}}}$, & que par conſéquent l'Equation *B* devient l'Equation *C*. Mais comme dans le premier membre de cette Equation, on peut mettre au lieu de $\overline{1+z}^{\frac{r}{n}}$ ſa valeur tirée de la formule de l'article LIV, il eſt clair qu'il ſuffit de prouver l'Equation *D*. Or pour prouver cette Equation, il ſuffit de multiplier le ſecond membre par le dénominateur du premier, & de s'aſſurer que le produit qui en vient eſt l'unité numérateur du premier membre, c'eſt ce qui arrive en effet, car faiſant la multiplication, il vient pour produit la quantité *E*, dont le premier terme qui eſt l'unité eſt le ſeul qui reſte après la réduction. Ainſi on eſt aſſuré préſentement, par une démonſtration, que la formule de l'article XLVIII. a toute la généralité qu'on ne faiſoit d'abord que lui ſoupçonner.

LVI.

Mais quelqu'aſſuré qu'on ſoit d'une vérité par une démonſtration générale, on ne ſçauroit gueres ſe défendre de chercher à la voir confirmée dans quelqu'application particuliere. Sçachant, par exemple, que la formule précédente eſt bonne pour l'élévation des quantités quelconques à des puiſſances fractionnaires, il eſt naturel qu'on veuille l'appliquer à quelque quantité qu'on ſçache avoir exactement une racine ou puiſſance fractionaire.

Exemple d'une racine quarrée priſe par la formule de l'élevation des puiſſances.

Soit par exemple la quantité $1+2b+b^2$ dont ont cherche la puiſſance $\frac{1}{2}$ ou ce qui revient au même la racine quarrée. Ayant fait $p=1$, $q=2b+b^2$, & $m=\frac{1}{2}$ dans la formule précédente, on trouvera ....

Le premier terme .... $p^m = 1$

Le ſecond .... $m p^{m-1} q = b + \frac{1}{2} b^2$

Le 3eme, $\frac{m \times \overline{m-1}}{2} p^{m-2} q^2 = -\frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} b^3 - \frac{1}{8} b^4$.

Le 4eme, $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3} p^{m-3} q^3 = \frac{1}{2} b^3 + \frac{3}{4} b^4 + \frac{3}{8} b^5 + \frac{1}{16} b^6$.

Le 5eme, $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3 \times 4} p^{m-4} q^4 = -\frac{5}{8} b^4 - \frac{5}{4} b^5 - \frac{15}{16} b^6 - \frac{5}{16} b^7 - \frac{5}{128} b^8$.

Le

$$A \quad \overline{p+q}^{\frac{r}{n}} = p^{\frac{r}{n}} + \frac{r}{n} p^{\frac{r}{n}-1} q + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2} p^{\frac{r}{n}-2}$$

$$B \quad \overline{1+z}^{\frac{r}{n}} = 1 + \frac{r}{n} z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2} z^2 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2\times}$$

$$C \quad \overline{1+z}^{r} = 1 + {}^{n} z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2} z^2 + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times}{2\times}$$

$$s = \frac{r}{n} z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2} z^2 + \frac{r}{n}\times$$

$$D \quad \overline{1+z}^{r} = \overline{1+s}^{n}$$

$$E \quad 1 + rz + \frac{r\times\overline{r-1}}{2} z^2 + \frac{r\times\overline{r-1}\times\overline{r-2}}{2\times3} z^3 + r$$

$$F \quad \left\{\begin{matrix} 1 \\ + ns \\ + \frac{n\times\overline{n-1}}{2} s^2 \\ + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{2\times3} s^3 \\ + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}\times\overline{n-3}}{2\times3\times4} s^4 \\ + \&c. \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1 \\ + n\times\frac{r}{n} z \\ + \end{matrix}\right.$$

$$G \quad 1 + ns + \frac{n\times\overline{n-1}}{1} s^2 + \frac{n\times\overline{n-1}\times\overline{n-2}}{2\times3} s^3 + \frac{n\times\overline{n-}}{}$$

$$A \quad \overline{p+q}^{\,-\frac{r}{n}} = p^{-\frac{r}{n}} - \frac{r}{n}p^{-\frac{r}{n}-1}q + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}}{2}p^{-\frac{r}{n}-2}q^{2} -$$

$$B \quad \overline{1+z}^{\,-\frac{r}{n}} = 1 - \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}}{2}z^{2} - \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+}}{2\times 3}$$

$$C \quad \frac{1}{1+z}^{\frac{r}{n}} = 1 - \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}}{2}z^{2} - \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}}{2\times 3}$$

$$\frac{1}{} \quad \&c.$$

$$D \quad 1 + \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}z^{2} + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}}{2\times 3}z^{3} +$$

$$E \quad 1 - \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}}{2}z^{2} - \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}\times\overline{\frac{r}{n}+2}}{2\times 3}z^{3} + \frac{\frac{r}{n}\times}{}$$

$$+\frac{r}{n}z^{2} - \frac{r}{n}\times\frac{r}{n}z^{2} \quad + \frac{\frac{r}{n}\times\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}}{2}z^{3} \quad - \frac{\frac{r}{n}\times}{}$$

$$+ \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}z^{2} - \frac{\frac{r}{n}\times\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}}{2}z^{3} + \frac{\frac{r}{n}\times}{}$$

$$+ \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}-1}\times\overline{\frac{r}{n}-2}}{2\times 3}z^{3} -$$

Le 6eme, &c. & c'est la somme de tous ces termes qui doit être la racine cherchée.

A l'inspection de cette quantité, on a de la peine à croire qu'elle puisse se réduire à $1+b$ qu'on sçait être la racine cherchée. Mais la généralité de la démonstration précédente, & une certaine expérience de calcul assurent bien-tôt de cette réduction.

En ajoutant tous ces termes, on remarque que le premier 1 reste tout entier; que le second $b+\frac{1}{2}b^2$ se réduit à b, parce que la partie $\frac{1}{2}b^2$ de ce second terme est détruite par la même quantité en négatif contenue dans le troisiéme terme $-\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}b^3-\frac{1}{8}b^4$; que ce qui reste du troisiéme terme $-\frac{1}{2}b^3-\frac{1}{8}b^4$, après la destruction de $\frac{1}{2}b^2$ est entierement détruit aussi par le quatriéme $\frac{1}{2}b^3+\frac{3}{4}b^4+\frac{3}{8}b^5$ $+\frac{1}{16}b^6$ dont il ne reste plus alors que $\frac{5}{8}b^4+\frac{3}{8}b^5$ $+\frac{1}{16}b^6$ & ce reste du quatriéme terme se trouve détruit de même par le cinquiéme terme, & en poussant les réductions plus loin, on voit que rien ne reste de toute la quantité que $1+b$, ainsi qu'il devoit arriver.

LVII.

Outre que cet exemple & tous ceux de même nature, qu'il est aisé de faire, confirment, pour ainsi dire par expérience, la proposition démontrée, article LI. ils montrent en même-tems une utilité réelle qu'a cette proposition, en donnant un moyen d'extraire les racines des quantités qui sont des puissances

Lorsque les quantités n'ont point de racines exactes on en

trouve d'approchées par la méthode précédente.

complettes. Mais il y a bien d'autres avantages à retirer de cette proposition. Lorsque la quantité dont on voudra prendre une racine n'en aura point d'exacte, on en aura une approchée par la formule précédente.

Exemple.

Qu'on cherche, par exemple, la racine 5eme de la quantité $a+b$. En substituant la plus grande des deux parties de cette quantité qu'on suppose être a à la place de p, & substituant la plus petite b à la place de q & $\frac{1}{5}$ à la place de m, on aura pour la racine cherchée

Ce que c'est qu'une série ou suite infinie.

$$a^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5} a^{-\frac{4}{5}} b - \frac{1 \times 4}{2 \times 25} a^{-\frac{9}{5}} b^2 + \frac{1 \times 4 \times 9}{2 \times 3 \times 125} a^{-\frac{14}{5}} b^3$$

$$- \frac{1 \times 4 \times 9 \times 14}{2 \times 3 \times 4 \times 625} a^{-\frac{19}{5}} b^4 + \frac{1 \times 4 \times 9 \times 14 \times 19 a^{-\frac{24}{5}} b^5}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 3125}$$

$$- \&c. \text{ ou } a^{\frac{1}{5}} \times \overline{1 + \frac{b}{5a} - \frac{2bb}{25aa} + \frac{6b^3}{125a^3} - \frac{21b^4}{625a^4}}.$$

$+ \&c.$

Or quoique ce ne soit qu'en formant de la même maniere une infinité de termes, qu'on puisse être assuré que la quantité précédente qui est de celles qu'on appelle suites ou series infinies, exprime exactement la racine cherchée; en se contentant néanmoins de prendre un grand nombre de ces termes, on approche extrêmement de la vraie racine cherchée. S'il arrive même que a soit considérablement plus grand que b, on n'a pas besoin de beaucoup de termes pour approcher sensiblement de la vraye racine.

Qu'on suppose, par exemple, $b = \frac{1}{10} a$, on

aura pour les six premiers termes de la suite précédente

$$a^{\frac{1}{5}} \times \overline{1 + \tfrac{1}{50} - \tfrac{1}{1250} + \tfrac{3}{62500} - \tfrac{21}{6250000} + \tfrac{399}{1562500000}}$$

Or si on fait attention à la considérable diminution successive de ces six termes, on voit que les termes qu'on pourroit écrire de plus seroient si petits qu'ils ne valent pas la peine d'être cherchés.

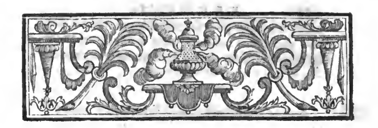
LVIII.

L'utilité de la formule des puissances ne se borne pas encore à trouver par approximation toutes sortes de puissances fractionnaires ou négatives, elle est infiniment plus étendue en servant à réduire en series toutes sortes de quantités où il entre tant de signes radicaux, diviseurs, &c. qu'on voudra. Qu'on ait, par exemple la quantité $\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{a-b}}}{\sqrt[3]{a+b}-\sqrt[3]{a-b}}$, en réduisant d'abord les deux quantités $\sqrt[3]{a+b}$ & $\sqrt[3]{a-b}$ en series, & les ajoutant, puis en élevant la série qui en est la somme à la puissance $\frac{1}{4}$, on formera une nouvelle série, qui étant multipliée ensuite par celle qu'on trouveroit de même pour .... $\overline{\sqrt[3]{a+b}-\sqrt[3]{a-b}}$ ou $\overline{\sqrt[3]{a+b}-\sqrt[3]{a-b}}^{-1}$ donneroit enfin une seule série pour exprimer la quantité proposée. Or outre qu'on a ainsi

Toutes sortes de quantités peuvent être réduites en séries par la formule précédente.

par approximation, toutes ces quantités composées de radicaux & de diviseurs complexes, il y a une infinité de cas où il est très-utile, pour des démonstrations, que ces quantités soient délivrées de tous ces radicaux & diviseurs complexes, ainsi qu'elles le sont par leurs transformations en séries, mais il est tems de retourner à la résolution des Equations.





ELEMENS D'ALGEBRE.

CINQUIE'ME PARTIE.

Résolution des Equations du troisiéme & du quatriéme dégré.



LORSQU'ON aura voulu passer de la résolution des Equations exprimées généralement par $ax^m = b$ & $ax^{2m} + bx^m = c$ à celles qui contenoient outre ces termes, les intermédiaires, on a bien-tôt senti des difficultés qui ont fait abandonner l'espérance de résoudre ces Equations en général. On n'a pû encore parvenir qu'à la solution de celles du troisiéme & du quatriéme dégré, encore la méthode

qu'on a trouvé pour les résoudre, souffre-t'elle une exception considérable ; voici le chemin qu'on a pû suivre en découvrant cette méthode.

I.

Equation du troisiéme dégré la plus composée.

Soient représentées par l'Equation $y^3 + dy^2 + ey + f = 0$ toutes celles du troisiéme dégré. Si on pouvoit réduire cette Equation à une autre qui n'eut que le premier, & que le dernier terme, il est évident que ce seroit l'avoir résolue. Or quel est le moyen le plus naturel de transformer une Equation en une autre, dans laquelle on soit libre de faire quelque changement, c'est de substituer dans cette Equation à la place de l'inconnue quelque quantité, dans laquelle on laisse une lettre indéterminée, afin de pouvoir s'en servir à volonté.

II.

Transformation par laquelle on fait évanouir un terme quelconque de cette Equation.

Soit donc substitué dans cette Equation au lieu de y, $x + r$, nous aurons $x^3 + \overline{3r + d} \times xx + \overline{3rr + 2dr + e} \times x + r^3 + dr^2 + er + f = 0$ que l'on écrit aussi de cette maniere

$$\begin{array}{llll} x^3 + 3rx^2 & + 3rrx & + r^3 & = 0 \\ \quad\; + d & + 2dr & + dr^2 & \\ & + e & + er & \\ & & + f & \end{array}$$

Comme on est le maître de r dans cette Equation, il est aisé de voir qu'on peut par son moyen faire évanouir celui des termes qu'on

voudra, mais auſſi on n'en ſçauroit faire diſparoître qu'un à la fois.

Qu'on faſſe, par exemple $3r + d = 0$ ou $r = -\frac{1}{3}d$, le ſecond terme s'évanouira, & l'Equation deviendra

$$\begin{aligned} x^3 + \; & ex + \tfrac{2}{27}d^3 = 0 \\ -\tfrac{1}{3}dd & - \tfrac{de}{3} \\ & + f \end{aligned}$$

Si on fait au contraire $3rr + 2dr + e = 0$ ou $r = -\frac{1}{3}d \pm \sqrt{-\frac{e}{3} + \frac{1}{9}dd}$, le troiſiéme terme s'évanouira, mais les deux autres reſteront.

Si on vouloit faire évanouir le dernier terme, il faudroit faire $r^3 + dr^2 + er + f = 0$, & alors pour avoir r, il faudroit réſoudre une Equation pareille à la propoſée.

Avec un peu de connoiſſance du calcul, on devoit bien s'attendre que la ſubſtitution de $x + r$ à la place de y ne pouvoit pas faire évanouir pluſieurs termes à la fois, parce que l'introduction d'une inconnue ne peut ſervir qu'à réſoudre une ſeule Equation, ou ce qui revient au même, à remplir une condition; or l'évanouiſſement de chaque terme fait une condition. Mais ſi par cette transformation on n'eſt pas parvenu entierement au but que l'on avoit eu de réduire l'Equation propoſée à deux termes, on a du moins changé la queſtion en une nouvelle qui paroît plus ſimple, puiſqu'il ne s'agit plus que d'une Equation à trois termes.

Des deux Equations transformées qu'on peut avoir en faiſant évanouir, ou le premier, ou le ſecond terme, la premiere, c'eſt-à-dire,

$$\begin{array}{llll} x^3 & + ex & + \frac{2}{27}d^3 & = 0 \\ & - \frac{1}{3}d^2 & - \frac{de}{3} & \\ & & + f & \end{array}$$

eſt la plus ſimple, auſſi eſt-ce celle que nous allons chercher à réſoudre en tâchant de diminuer encore ſes termes, mais nous ſuſpendrons un moment cette recherche, parce que la méthode qu'on vient d'employer pour tranſformer les Equations du troiſiéme dégré offre ſi naturellement de nouvelles vérités ſur les Equations de tous les autres dégrés, qu'il eſt à propos de s'y arrêter un peu.

III.

On voit d'abord qu'à l'aide de la même transformation de y en $x+r$, on peut faire auſſi évanouir le terme qu'on voudra d'une Equation d'un dégré quelconque.

Transformation précédente appliquée à une Equation du quatriéme dégré.

Qu'on ait par exemple l'Equation du quatriéme dégré la plus générale $y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$, en y mettant $x+r$ au lieu de y, on aura

$$\begin{array}{lllll} x^4 & + 4rx^3 & + 6r^2x^2 & + 4r^3x & + r^4 = 0 \\ & + a & + 3ar & + 3ar^2 & + ar^3 \\ & & + b & + 2br & + brr \\ & & & + c & + cr \\ & & & & + d \end{array}$$

dans laquelle faiſant $4r + a = 0$ ou $r = -\frac{1}{4}a$,

on aura une Equation du quatriéme dégré qui n'aura point de second terme.

De même en déterminant r par l'Equation du second dégré $6r^2 + 3ar + b = 0$, on aura une Equation du quatriéme dégré qui n'aura point de troisiéme terme. Et en faisant r tel qu'il conviendroit pour résoudre l'Equation du 3e dégré dégré $4r^3 + 3ar^2 + 2br + c = 0$, on auroit une Equation du 4eme dégré qui n'auroit point de quatriéme terme. Le cinquiéme s'en iroit de même par le moyen d'une Equation du 4me dégré. Mais on ne s'arrête pas ordinairement à faire évanouir d'autres termes que le second, parce que l'évanouissement des autres termes amene presque toujours des calculs compliqués de radicaux & fort pénibles.

Ce n'est ordinairement que le second terme qu'on fait évanouir.

IV.

Evanouissement du second terme dans une Equation du cinquiéme dégré.

Dans une Equation générale du cinquiéme dégré $y^5 + ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e = 0$ la transformée $y = x + r$ donne l'Equation $x^5 + \begin{matrix} 5r \\ +a \end{matrix} x^4 + \&c.$ dont le second terme s'évanouira par l'Equation du premier dégré $5r + a = 0$ ou $r = -\frac{1}{5}a$.

V.

Dans une Equation du dégré quelconque m.

Et en général dans une Equation d'un dégré quelconque m représentée par $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \&c. = 0$ il sera aisé de trouver par la formule des puissances donnée dans la IVeme Partie, article XLVIII. que le second terme s'évanouira en faisant l'inconnue $x = y - \frac{a}{m}$.

VI.

Résolution de l'Equation générale $x^3+pu+q=0$.

Après cette petite digreſſion, remettons-nous à chercher la ſolution de l'Equation du troiſiéme dégré

$$\begin{array}{l} x^3 + ex + \frac{2}{27}d^3 = 0 \\ \quad\;\; - \frac{1}{3}d^2 \quad - \frac{de}{3} \\ \qquad\qquad\quad + f \end{array}$$

à laquelle l'Equation générale $y^3 + dy^2 + ey + f = 0$ s'étoit réduite par la ſuppoſition de $y = x - \frac{1}{3}d$, & pour abréger les calculs, écrivons-là ainſi, $x^3 + px + q = 0$.

En ſuivant l'idée que nous avons déja employée, faiſons encore une transformée, ſubſtituons, par exemple $u + z$ à la place de x; non dans la vûe de faire évanouir un terme de cette Equation, ainſi qu'on avoit fait la premiere fois, car on verroit bien-tôt que le terme qui avoit diſparu reviendroit, mais pour chercher à décompoſer cette Equation en de plus ſimples. Sans voir diſtinctement qu'un tel moyen doit réuſſir, on ſent bien que la tranſformation d'une Equation en une autre où l'on a une lettre à déterminer à volonté ne peut gueres manquer d'être utile.

La ſubſtitution de $x = u + z$ étant faite, on a $u^3 + 3uuz + 3uzz + z^3 + pu + pz + q = 0$. Suppoſons maintenant que l'une des inconnues u ou z ſoit telle que $u^3 + z^3 + q = 0$, on aura en ce cas l'Equation $3u^2z + 3uz^2 + pu + pz = 0$, de laquelle on tire aiſément en la diviſant par $u + z$, $3uz + p = 0$ ou

$u = -\frac{p}{3z}$. Voilà donc de quoi chaſſer facilement une des inconnues introduites, il ne s'agit plus que de ſçavoir quelle ſera l'Equation qui déterminera l'autre inconnue. Pour cela, il faut remettre cette valeur de u dans la premiere Equation $u^3 + z^3 + q = 0$, ce qui donnera $-\frac{p^3}{27z^3} + z^3 + q = 0$, ou $z^6 + qz^3 = \frac{p^3}{27}$, or cette Equation quoique plus élevée que la propoſée, eſt cependant bien plus aiſée à réſoudre, car elle eſt de la claſſe de celles que nous avons réſolues dans la quatriéme Partie, article xx. & la valeur qu'elle donne pour z eſt $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$.

Donc u ou $-\frac{p}{3z}$ ſera $\frac{-\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}}$

qui ſe réduit facilement à $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$; car on peut voir aſſez facilement que le produit de $-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$ par $+\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$ eſt $\frac{1}{27}p^3$, & partant que $\frac{1}{3}p$ eſt le produit des racines cubes de ces quantités. Ajoutons préſentement ces valeurs de u & de z, & nous aurons $u + z$ ou. . . . . .

$$\ldots\ldots\ldots x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$$

$-\sqrt[3]{+\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$ ou ſimplement

$$\ldots\ldots\ldots x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$$

$-\sqrt[3]{+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$, car en prenant le radical $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$ en $-$, on n'a pas une valeur de x différente de celle qu'on a en le prenant en $+$.

VII.

La formule précédente ne donne qu'une des trois racines.

Par cette valeur de x, on voit qu'il n'en eſt pas des Equations du troiſiéme dégré comme de celles du ſecond, où la même expreſſion d'une racine marquoit à l'aide du ſigne $\pm$ les deux racines à la fois ; ici on trouve une expreſſion qui ne ſçauroit déſigner qu'une des trois valeurs de x.

Maniere d'avoir les deux autres.

Pour trouver les deux autres, il faut diviſer l'Equation $x^3+px+q=0$ par la racine que donne la valeur précédente de x, & la réſolution de l'Equation du ſecond dégré qui en ſera le quotient donnera les deux autres racines cherchées.

Si on veut trouver la valeur générale de ces deux racines, il faut faire pour abréger les calculs $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}=m$, & $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}=n$, & faire attention qu'en ce cas $mn=\frac{1}{3}p$ & $m^3-n^3=q$. Cela poſé, la diviſion de l'Equation $x^3+px+q=0$ par $x+m-n$, qui eſt alors la racine qu'on vient de trouver, donnera pour quotient $xx+nx-mx+mm+nn+mn=0$ dont les deux racines, c'eſt-à-dire les deux racines cherchées de l'Equation $x^3+px+q=0$ ſont

$$x = \frac{m-n}{2} \pm \frac{1}{2} \times \overline{m+n}\sqrt{-3} \text{ ou} \ldots\ldots$$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$$
$$\pm \overline{\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}} \times \sqrt{-3}$$

qui ſont néceſſairement imaginaires toutes les fois que $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$ eſt une quantité réelle. On auroit pû reconnoître dès l'article V, de la quatriéme Partie, où il n'étoit queſtion que des Equations à deux termes, l'eſpece d'imperfection que donne à la ſolution des Equations du troiſiéme dégré, la différence de forme des trois racines, mais cette eſpece d'imperfection eſt ici plus frappante en ſe trouvant dans la ſolution générale.

VIII.

Ce déſavantage de la ſolution précédente des Equations du troiſiéme dégré n'en peut paroître un qu'à ceux qui conſiderent, pour ainſi dire, métaphyſiquement l'Algebre, mais il y en a un autre bien plus frappant pour tout le monde, & qui a extrêmement exercé tous les Calculateurs. C'eſt que cette ſolution n'apprend rien du tout pour la valeur de x toutes les fois que $\frac{1}{27}p^3$ eſt plus grand que $\frac{1}{4}qq$, & qu'il eſt en même-tems négatif. Dans ce cas qui eſt très-étendu, la valeur de la quantité $\sqrt{\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}q^2}$ eſt imaginaire, & par conſéquent les deux quantités . . . .

Cas où la formule précédente ne ſçauroit faire connoître x, à cauſe des imaginaires qu'elle renferme.

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ & . . . . $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ qui composent la valeur de x sont imaginaires aussi, mais on n'en sçauroit conclure pour cela que la valeur de x soit imaginaire, ce qui bien loin d'être regardé comme un vice de la solution, la rendroit une solution complette ; & on ne sçauroit non plus, du moins par les méthodes connues jusqu'à présent, déterminer quelle est la quantité réelle qu'exprime cette valeur de x.

IX.

Non-seulement on ne sçauroit conclure de l'expression que x a dans ce cas que la racine cherchée est imaginaire, mais on s'est assuré par divers moyens que cette valeur étoit toujours réelle alors, voici de tous ces moyens celui * qui m'a paru le plus direct.

On démontre cependant que dans ce cas x est réel.

Soit repris la valeur $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ de x ; mettons à la place de $\frac{1}{2}q$, a & à la place de . . . . . $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$ supposé imaginaire, $b\sqrt{-1}$, on aura $x=\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}-\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$.

Cherchons maintenant les valeurs de $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}$ & de $-\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$ par la

* Je l'ai tiré d'un Mémoire de M. Nicole. Mem. de l'Acad. année 1738. p. 99. & 100.

formule donnée dans la quatriéme Partie, article XLVIII. pour l'élevation du binome.

Nous aurons pour la premiere de ces deux quantités $-a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}b\sqrt{-1} - \frac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2 - \frac{5}{81}a^{-\frac{8}{3}}b^3\sqrt{-1} + \frac{10}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4 + \&c.$

Et pour la seconde,

$-a^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}b\sqrt{-1} - \frac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2 + \frac{5}{81}a^{-\frac{8}{3}}b^3\sqrt{-1} + \frac{10}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4 - \&c.$ & par conséquent la valeur de x sera la suite infinie $-2a^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2 + \frac{20}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4 - \frac{308}{6561}a^{-\frac{17}{3}}b^6 + \&c.$ ou

$$-2a^{\frac{1}{3}} \times \overline{1 + \frac{b^2}{9a^2} - \frac{10b^4}{243a^4} + \frac{154b^6}{6561a^6} - \&c.}$$

qui ne contient aucune racine imaginaire; ainsi dans le cas où $\frac{1}{27}p^3$ est négatif & plus grand que $\frac{1}{4}qq$ la valeur $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}}$ $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}}$ de x qui est alors sous une forme imaginaire, est cependant une quantité toujours réelle. Malheureusement on n'a pû encore jusqu'à présent lui trouver une forme réelle qu'en admettant, ainsi qu'on vient de faire, une infinité de termes dans son expression, ce qui ne peut servir qu'à prouver que cette valeur est réelle, mais non à la faire connoître exactement.

X.

Par la même méthode on trouvera une valeur approchée de x.

Si on veut se contenter d'une approximation, on pourra faire usage de la série précédente, car en supposant a plus grand que b, les termes de cette série iront en diminuant, & par conséquent on pourra négliger les derniers quand ils seront parvenus à n'être que de très-petites quantités. S'il arrive au contraire que a soit plus petit que b, il faudra en employant la formule du binome pour trouver $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}$ & $\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$, avoir l'attention de prendre $b\sqrt{-1}$ pour le premier terme du binome, & a pour le second; & l'on aura alors pour la valeur de x ou de $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$ la quantité $+\frac{2}{3}b^{-\frac{2}{3}}a - \frac{10}{81}b^{-\frac{8}{3}}a^3 + \frac{44}{729}b^{-\frac{14}{3}}a^5 - \frac{748}{19683}b^{-\frac{20}{3}}a^7 +$ &c. ou ....

$$-\frac{2a}{3b^{\frac{2}{3}}} \times \overline{-1 + \frac{5a^2}{27b^2} - \frac{22a^4}{243b^4} + \frac{374a^6}{6561b^6} - \&c.}$$

qui est aussi réelle que l'autre expression, & dont tous les termes décroissent quand a est plus petit que b.

XI.

Les deux autres valeurs d'x sont aussi réelles dans le même cas.

Nous avons vû article VII. que des trois racines de l'Equation $x^3+px+q=0$ celles qui sont exprimées par .... $x=$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}} - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}$$

$\pm$

$\pm \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} \times \sqrt{-3}$ ſont toutes deux imaginaires toutes les fois que $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$ étoit une quantité réelle. Nous allons voir préſentement que ces deux racines ſont toujours réelles toutes les fois que $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$ eſt imaginaire, c'eſt-à-dire, toutes les fois que p eſt négatif, & tel que $\frac{1}{27}p^3$ eſt plus grand que $\frac{1}{4}qq$.

Car ſi on change à l'aide des dénominations qu'on vient d'employer l'expreſſion de ces deux valeurs de x en . . . .

$\frac{1}{2}\sqrt[3]{-a + b\sqrt{-1}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}$,

$\pm \frac{1}{2}\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{-a + b\sqrt{-1}} \times \sqrt{-3}$

& qu'on réduiſe ainſi qu'on vient de faire les quantités $\sqrt[3]{-a + b\sqrt{-1}}$ & $\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}$ en ſéries, on aura pour ces deux valeurs de x

$$a^{\frac{1}{3}} \times \overline{1 + \frac{bb}{9aa} - \frac{10b^4}{243a^4} + \frac{154b^6}{6561a^6} - \&c.}$$

$$\pm \frac{b}{a^{\frac{2}{3}}\sqrt{3}} \times \overline{1 - \frac{5bb}{27aa} + \frac{22b^4}{243a^4} - \frac{374b^6}{6561a^6} + \&c.}$$

expreſſion entierement réelle.

X I I.

Comme l'Equation la plus générale du troiſiéme dégré repréſentée par $y^3 + dy^2 + ey + f = 0$ s'eſt réduite à $x^3 + \begin{matrix} e \\ -\frac{1}{3}d^2 \end{matrix} x + \begin{matrix} \frac{2}{27}d^3 \\ -\frac{de}{3} \\ +f \end{matrix} = 0$

Comment des racines de l'Equation $x^3+px+q=o$, on tire celles de l'Equation $y^3+dy^2+ey+f=o$.

ou en abrégeant $x^3+px+q=o$ par la ſuppoſition de $y=x-\frac{1}{3}d$, il s'enſuit que les valeurs de y dans l'Equation générale $y^3+dy^2+ey+f=o$ ſont celles qu'on a en reſolvant cette derniere Equation $x^3+px+q=o$, & en retranchant de ſes trois racines $\frac{1}{3}d$.

XIII.

De-là, il ſuit qu'une Equation quelconque du troiſiéme dégré ſera entierement dans le même cas par rapport aux racines réelles ou imaginaires, que l'Equation qu'elle produit par l'évanouiſſement du ſecond terme.

Une Equation du troiſiéme dégré a ſes trois racines réelles, ou une réelle avec deux imaginaires.

Ainſi on voit en ſe rappellant les articles VII, XI. que toute Equation du troiſiéme dégré doit au moins avoir une racine réelle, & que les deux autres ſont toujours ou toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires.

XIV.

Comment on diſtingue ces cas.

Pour diſtinguer lequel de ces deux cas arrive dans une Equation du troiſiéme dégré donnée, on commencera par en faire évanouir le ſecond terme afin de la pouvoir comparer à l'Equation $x^3+px+q=o$; & cette opération étant faite, ſi p eſt poſitif ou qu'étant négatif il ſoit tel que $\frac{1}{27}p^3$ ne ſoit pas plus grand que $\frac{1}{4}qq$, il n'y aura qu'une racine réelle,

laquelle ſera déterminée exactement par la formule de l'article VI.

Si au contraire p eſt négatif & tel que $\frac{1}{27}p^3$ ſoit plus grand que $\frac{1}{4}qq$, les trois racines ſeront réelles, mais aucune d'elles ne pourra être déterminée par la formule de l'article VI; à moins qu'on ne ſe contente d'une approximation comme celle qu'on a en transformant cette formule en une ſuite infinie.

XV.

Quelles ſont les racines lorſque $\frac{1}{27}p^3$ eſt négatif & $=\frac{1}{4}qq$.

S'il arrivoit que $\frac{1}{27}p^3$ fut négatif & égal à $\frac{1}{4}qq$, on pourroit être embarraſſé à ſçavoir auquel des deux cas précédens l'Equation ſe rapporteroit, c'eſt-à-dire qu'on ne ſçauroit s'il devroit y avoit ſeulement une racine réelle ou ſi toutes les trois le ſeroient, à cauſe que $\sqrt{\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}qq}$ étant alors zero, on ne ſçait ſi on le doit compter parmi les quantités poſitives ou parmi les négatives ; mais l'inſpection des trois racines ou valeurs d'x trouvées précédemment décide bien-tôt la queſtion. Car la premiere valeur exprimée par ...... $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ ſe réduit alors à .. $-2\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$, & les deux autres valeurs exprimées généralement par ....

$$\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}$$

$\pm\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}\times\sqrt{-3}$ ſe réduiſent alors à $+\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}\pm o$, c'eſt-à-dire qu'elles ſont toutes deux égales à $+\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$. Ainſi les Equations où $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$ eſt zero ſont comptées parmi celles dans leſquelles les trois racines ſont réelles.

XVI.

Application des méthodes précédentes à un exemple.

Pour faire préſentement quelques applications des regles précédentes, ſuppoſons d'abord qu'on ait l'Equation $y^3+3yy-3y+25=o$ à réſoudre ; on commencera par faire évanouir le ſecond terme de cette Equation, ce qui ſe fera ſuivant l'article II. en ſuppoſant $y=x-1$ & l'Equation délivrée de ſecond terme que l'on aura par cette ſubſtitution ſera $x^3-6x+30=o$ qui étant comparée à $x^3+px+q=o$ donne $p=-6$ & $q=30$.

Ces valeurs étant ſubſtituées dans....... $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$, cette quantité devient $\sqrt{217}$ qui eſt une quantité réelle, ainſi la formule de l'article VI doit donner en ce cas la valeur cherchée de x.

Faiſant donc dans cette formule......

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$ les ſubſtitutions de 15 pour $\frac{1}{2}q$ & de $\sqrt{217}$ pour $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$ cette valeur générale de x

devient $\sqrt[3]{-15+\sqrt{217}}-\sqrt[3]{15+\sqrt{217}}$ qui est la seule racine réelle que contienne l'Equation $x^3-6x+30=0$, & qui ne sçauroit être réduite à une plus simple expression; substituant ensuite cette valeur de x dans l'Equation $y=x-1$, on aura . . . .
$y=\sqrt[3]{-15+\sqrt{217}}-\sqrt[3]{15+\sqrt{217}}-1$, pour la seule racine réelle de l'Equation proposée $y^3+3yy-3y+25=0$.

XVII.

Autre exemple contenant une Equation du sixiéme dégré qui se réduit au troisiéme.

Si on avoit une Equation du sixiéme dégré, où l'inconnue ne se trouvât à aucune dimension impaire, il est évident qu'on la résoudroit par la même méthode que la précédente, puisque cette Equation se réduiroit tout de suite au troisiéme dégré par une transformation; qu'on eut, par exemple $z^6+9z^4+39zz+55=0$, en regardant zz comme l'inconnue de cette Equation, & supposant, suivant les principes précédens zz égal à une nouvelle inconnue x moins le tiers du coefficient du second terme, c'est-à-dire $zz=x-3$, on changera cette Equation en $x^3+12x-8=0$ qui n'est que du troisiéme dégré & qui n'a point même de second terme.

Comparant alors cette Equation avec $x^3+px+q=0$, on a $p=12$, $q=-8$, & partant $\sqrt{\frac{1}{27}p^3+{}^{1}\,qq}=\sqrt{80}$ d'où x ou . . . .

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}q^2}}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}qq}}=$ $\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}$, & comme, par la supposition $zz=x-3$ ou $z=\sqrt{x-3}$ on aura alors l'inconnue cherchée ....

$x=\pm\sqrt{\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}}-3$ & les deux valeurs que cette expression donne en prenant le radical en $+$ & en $-$ sont les seules réelles des six que doit avoir l'Equation proposée.

Equations plus élevées qui s'y réduiroient aussi.

En général qu'on ait une Equation telle que $z^{3m}+az^{2m}+bz^{m}+c=0$ on la réduira tout de suite à une du troisiéme dégré & sans second terme en faisant $z^{m}=x-\frac{1}{3}a$.

XVIII.

Supposons présentement qu'on ait l'Equation $x^3+3x-4=0$ à résoudre, cette Equation n'ayant point de second terme, on peut tout de suite la comparer à $x^3+px+q=0$, & l'on a par cette comparaison $p=3$ & $q=-4$ & comme p est positif, on voit par l'article XIV. que la formule générale de l'article VI. doit encore réussir dans ce cas; substituant en effet ces valeurs de p & de q dans cette formule générale .... $=x$

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}qq}}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}qq}}$
on a pour la seule valeur réelle de x,

$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{-2+\sqrt{5}}$. Si l'on applique présentement à cette expression la méthode de la quatriéme Partie, art. XXXV, XXXVIII & XLI. on verra qu'elle se peut aisément réduire, parce que $2+\sqrt{5}$ est le cube de $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$, & que $-2+\sqrt{5}$ est celui de $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$. D'où cette valeur de x se réduit à 1.

On auroit pû parvenir à cette même valeur de x sans la formule précédente en employant la regle de la troisiéme Partie, article XII & XIII. car on auroit trouvé que $x-1$ étoit un diviseur exact de la quantité x^3+3x-4.

XIX.

Quatriéme exemple dans lequel la formule de l'art. VI. est insuffisante.

Soit maintenant proposé de résoudre l'Equation $x^3-90x-98=0$. En comparant cette Equation à l'Equation générale $x^3+px+q=0$ on a $p=-90$ & $q=-98$; or p étant négatif & tel que $\frac{1}{27}p^3$ est plus grand que $\frac{1}{4}qq$ l'Equation proposée est de celles qui ne peuvent pas se résoudre par la formule précédente. Je cherche alors par la méthode de la troisiéme Partie, art. XII & XIII si elle n'aura pas quelque diviseur, & ayant reconnu qu'elle n'en a point, je me sers de la méthode enseignée article X. pour trouver une valeur approchée.

Application de la méthode de l'article X pour approcher des racines.

Pour cela, je commence par substituer pour p & q leurs valeurs -90 & -98 dans la formule générale . . . .

$$x=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{27}p^3+\tfrac{1}{4}qq}} - \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{27}p^3+\tfrac{1}{4}qq}}$$

& j'ai . . . .

$x = \sqrt[3]{49+\sqrt{-24599}} - \sqrt[3]{-49+\sqrt{-24599}}$ qui étant comparé à l'expression . . . . $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$, laquelle étoit devenue (article x.) la suite infinie

$$-\frac{2a}{3b^{\frac{2}{3}}} \times -1 + \frac{5a^2}{27b^2} - \frac{22a^4}{243b^4} + \frac{374a^6}{6561b^6} - \&c.$$

donne $a = -49$, $bb = +24599$, qu'il ne s'agit plus que de substituer dans cette suite infinie.

Pour faire cette substitution, je commence par prendre la racine cube de 24599 afin d'avoir $b^{\frac{2}{3}}$, l'opération faite, j'ai environ 29, 08 pour cette racine cube, & partant . . . .

$\frac{-2a}{3b^{\frac{2}{3}}}$ ou $\frac{98}{3\sqrt[3]{24599}}$ est environ $\frac{10000}{8902}$.

Quarant ensuite aa & le divisant par bb, j'ai pour $\frac{aa}{bb}$ environ 0, 0976, dont le quarré 0, 00952 est la valeur de $\frac{a^4}{b^4}$, quant à la valeur de $\frac{a^6}{b^6}$, & des puissances plus élevées, elle est inutile dans cette suite dont la marche est assez prompte.

Faisant alors les substitutions des valeurs de $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^4}{b^4}$ à la place de ces quantités, j'ai environ -1, 104 pour la valeur de x donnée par la formule de l'article VI, si on veut avoir

les deux autres valeurs de x qui doivent auſſi être réelles, ſuivant l'article XIV. il n'y a qu'à diviſer l'Equation $x^3 - 90x - 98 = 0$ par $x + 1, 104$ qui eſt à très peu de choſe près, ſuivant ce que l'on vient de voir, une de ſes racines. La diviſion faite, on a pour quotient $xx - 1, 104x - 88, 781$, & pour reſte $0, 0142$ quantité aſſez petite pour être négligée, de ſorte qu'on peut regarder l'Equation $xx - 1, 104x - 88, 781 = 0$, comme le quotient exact de la diviſion de $x^3 - 90x - 98 = 0$ par $x + 1, 104$, & comme le produit des deux racines cherchées. Réſolvant donc cette Equation on a pour les deux valeurs de x qu'elle donne $x = 0, 552 \pm \sqrt{89, 0857}$, c'eſt-a-dire $+9, 990$ & $-8, 886$.

Ainſi les trois valeurs de x dans l'Equation propoſée $x^3 - 90x - 98 = 0$ ſont à peu près $-1, 104$; $+9, 990$; $-8, 886$. Quant aux valeurs exactes aucunes des méthodes connues juſqu'à préſent ne ſçauroient les faire trouver, & toute Equation qui ayant, comme la précédente, ſes coefficiens rationels n'aura aucun diviſeur rationel, ſera de même irréſoluble par ces méthodes lorſque $\frac{1}{27}p^3$ ſera négatif & plus grand que $\frac{1}{4}qq$.

XX.

La méthode que nous venons d'employer pour réſoudre par approximation les Equations du troiſiéme dégré dont les trois racines ſont réelles, a cet inconvenient que lorſque a differe peu de b, les termes de la ſérie qui

Inconvenient de l'approximation enſeignée, article X.

exprime la valeur de x décroissent si lentement, qu'il en faut un très-grand nombre pour approcher un peu exactement de la vraye valeur de x, & que par conséquent les calculs deviennent extrêmement pénibles. Il est donc à propos de chercher quelque méthode plus généralement commode dans la pratique.

XXI.

Autre méthode d'approximation générale & facile dans la pratique.

Dans cette vûe, je reprends l'Equation $x^3 + px + q = 0$ ou plûtôt $x^3 - px + q = 0$ (les cas qui échappent à la méthode de l'article VI. ne se trouvant jamais que parmi ceux où p est négatif) & je me propose de lui donner cette forme $z^3 - z = r$ qui est plus simple à cause qu'elle ne renferme qu'un terme d'indéterminé.

Afin de faire cette transformation, je fais $x = mz$, ce qui change l'Equation $x^3 - px + q = 0$ en $z^3 - \frac{p}{mm} z = -\frac{q}{m^3}$ qui m'apprend qu'en faisant $m = -\sqrt{p}$, si q est positif, & $m = \sqrt{p}$ si q est négatif, je donnerai toujours à l'Equation $x^3 - px + q = 0$ la forme $z^3 - z = +r$.

Je remarque présentement que si cette Equation est de celles que la formule de l'article VI. ne sçauroit résoudre, il faudra nécessairement que r soit plus petit que $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}$ ou $\sqrt{\frac{4}{27}}$; & qu'en même-tems il y ait une des racines qui soit positive & plus grande que l'unité, mais moindre que $\sqrt{\frac{4}{3}}$; car si z surpassoit $\sqrt{\frac{4}{3}}$ on auroit pour r, c'est-à-dire pour $z^3 - z$ plus de

$\sqrt{\frac{4}{27}}$, & par conséquent l'Equation $z^3 - z = r$ seroit du nombre de celles où la formule de l'article VI. réussit.

Cela posé, je fais $z = 1 + \delta$, & substituant cette valeur dans l'Equation $z^3 - z = r$, elle donne $2\delta + 3\delta\delta + \delta^3 = r$, dans laquelle je remarque que δ étant une quantité toujours plus petite que $\sqrt{\frac{4}{3}} - 1$, c'est-à-dire plus petite que 0, 155, son cube est plus petit que 0, 0037. Or ce cube étant donc si petit, je vois qu'on ne peut pas commettre une grande erreur en négligeant le terme δ^3 dans l'Equation $2\delta + 3\delta\delta + \delta^3 = r$, c'est-à-dire en se contentant de résoudre l'Equation $2\delta + 3\delta\delta = r$. Je résous donc cette Equation, & elle me

donne $\delta = \pm\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}r} - \frac{1}{3} = \pm\frac{\sqrt{1+3r} - 1}{3}$

& par conséquent z ou $1 + \delta = \frac{2 \pm \sqrt{1+3r}}{3}$

ou simplement $z = \frac{2 + \sqrt{1+3r}}{3}$, puisque des valeurs de z, on ne cherche que celle qui surpasse l'unité & qui est positive.

Pour sçavoir à quoi peut monter l'erreur qu'on commet dans cette méthode, en négligeant le terme δ^3, prenons le cas où ce terme est le plus grand, supposons que z ou $1 + \delta$ soit $\sqrt{\frac{4}{3}}$, ce qui ne peut jamais arriver tant que l'Equation proposée est de celles qui échappent à la méthode de l'article VI, nous aurons alors $r = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}$, & notre méthode

nous donnera pour valeur de z, $\frac{2+\sqrt{1+\sqrt{\frac{4}{3}}}}{3}$ au lieu de la vraye valeur $\sqrt{\frac{4}{3}}$. Or il eſt clair que ces deux quantités ne différent entr'elles que d'environ $\frac{1}{1000}$ eme, donc la plus grande erreur qu'on peut commettre, en prenant $\frac{2+\sqrt{1+3r}}{3}$ pour la racine poſitive de l'Equation $z^3 - z = r$, ne va pas à $\frac{1}{1000}$ eme, ſi cette Equation eſt de celles que la formule de l'article VI. ne ſçauroit réſoudre.

La méthode qu'on vient d'enſeigner donne d'abord x à $\frac{1}{1000}$ eme prés au moins.

Ayant calculé la valeur de z par l'expreſſion $\frac{2+\sqrt{1+3r}}{3}$ il faudra la multiplier par m pour avoir la valeur approchée de x.

XXII.

Si on ne trouve pas que cette réſolution de l'Equation propoſée approche aſſez de la véritable, c'eſt-à-dire qu'on regarde les erreurs qui pourroient aller aux environs d'un milliéme comme trop conſidérables, rien ne ſera plus aiſé que de trouver une autre valeur de la racine beaucoup plus exacte, par une opération fondée ſur les mêmes principes. Ayant calculé cette premiere valeur de x, & l'ayant nommée pour abreger k, on imaginera que la correction qu'il faut lui faire ſoit ϵ, c'eſt-à-dire, qu'on ſuppoſera que le véritable x ſoit $k+\epsilon$;

ſubſtituant alors cette quantité pour x dans l'Equation $x^3 - px + q = 0$, l'on aura... $k^3 + 3k^2\varepsilon + 3k\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - pk - p\varepsilon + q = 0$ ou ſimplement $k^3 + 3k^2\varepsilon + 3k\varepsilon^2 - pk - p\varepsilon + q = 0$ en négligeant le terme ε^3 qui eſt bien plus négligeable que ne l'étoit le terme δ^3 à la premiere opération, puiſqu'il eſt infiniment plus petit ; réſolvant alors cette Equation la valeur de ε qu'elle donnera ſera la correction qui étant faite à la premiere valeur de x en donnera une ſeconde infiniment plus exacte.

Si on n'étoit pas encore content de cette ſeconde, on en trouveroit une troiſiéme en nommant la ſeconde valeur l, & ſubſtituant $l + \varphi$ à la place de x dans l'Equation propoſée $x^3 - px + q = 0$, & ainſi de ſuite.

Mais bien loin qu'on ait communément beſoin d'aller à des corrections ſi rigoureuſes, on pourra très-ſouvent ſe contenter de la valeur de x trouvée en premier lieu, où tout au plus il ſuffira, après la ſubſtitution de $k + \varepsilon$ pour x dans l'Equation $x^3 - px + q = 0$, de réſoudre l'Equation $k^3 + 3k^2\varepsilon - pk - p\varepsilon + q = 0$, c'eſt-à-dire de négliger outre le terme ε^3 le terme $3k\varepsilon^2$, parce que ce terme eſt déja très-petit.

XXIII.

Faiſons préſentement quelqu'application de cette méthode, ſoit par exemple l'Equation $z^3 - z = \frac{1}{3}$. En ſubſtituant $\frac{1}{3}$ pour r dans *Application de cette méthode à un exemple.*

l'expreſſion $\frac{2+\sqrt{1+3r}}{3}$, elle deviendra $\frac{2+\sqrt{2}}{3}$ c'eſt-à-dire environ 1, 138 qui eſt un peu plus grande que la vraye valeur de z; mais qui l'eſt de bien peu, puiſque 1, 137, comme on le peut voir aiſément par le calcul, feroit trop petit.

Pour approcher plus exactement de la vraye valeur de z on ſubſtitura $1,138+\epsilon$ à la place de z dans l'Equation $z^3-z=\frac{1}{3}$, & l'on aura $0,002426739+2,885132\epsilon=0$ en négligeant les termes affectés de ϵ^2 & de ϵ^3. Cette Equation étant réſolue elle donne $\epsilon = -0,00084I$, &partant pour la valeur de z corrigée 1, 137159. Si on avoit voulu faire cette correction plus exacte en ne négligeant que le terme affecté de ϵ^3, on auroit réſolu l'Equation $0,002426739+2,885132\epsilon+3,414\epsilon^2=0$, ce qui auroit donné la correction $\epsilon=-0,000841836$, c'eſt-à-dire pour z corrigé 1, 13715 8164.

XXIV.

Autre exemple. Suppoſons préſentement qu'il s'agiſſe de réſoudre de l'Equation $x^3-13x+5=0$, je fais $x=-z\sqrt{13}$, & elle ſe change en . . $z^3-z=\frac{5}{13\sqrt{13}}$, égalant donc r à $\frac{5}{13\sqrt{13}}$ dans la premiere valeur approchée $\frac{2+\sqrt{1+3r}}{3}$ de z

cette valeur devient $\frac{2+\sqrt{1+\frac{15}{13\sqrt{13}}}}{3}$, & elle donne par conſéquent pour x ....

$\frac{-2\sqrt{13}-\sqrt{13}+\frac{15}{\sqrt{13}}}{3}$, c'eſt-à-dire environ... $-3,784$; ſi on veut avoir une valeur de x plus exacte, on ſuppoſera $x=-3,784+\epsilon$, & on ſubſtituera cette valeur dans l'Equation $x^3-13x+5=0$, & l'on aura en négligeant les termes affectés de ϵ^2 & de ϵ^3 l'Equation $0,010205696+29,95597\epsilon=0$ qui donnera $\epsilon=-0,000341$, & par conſéquent $x=-3,784341$ valeur plus exacte que la premiere.

XXV.

Réſolution de l'Equation générale du quatriéme dégré.

Après avoir montré la maniere dont on parvient à la ſolution des Equations du troiſiéme dégré, voyons maintenant les moyens qu'il faut employer pour réſoudre celles du quatriéme dégré.

Prenant d'abord une Equation générale $y^4+ay^3+by^2+cy+d=0$ pour repréſenter toutes les Equations du quatriéme dégré, on réduit bien-tôt la difficulté à ne réſoudre qu'une Equation repréſentée par $z^4+pz^2+qz+r=0$ en faiſant $y=z-\frac{1}{4}a$. Enſuite pour réſoudre cette Equation, ce qui paroît de plus ſimple, c'eſt de la regarder comme le produit

de deux Equations du second dégré, & de faire en sorte que la détermination des coefficiens que doivent avoir les termes de ces Equations du second dégré ne dépende que d'Equations plus aisées à résoudre que la proposée.

Soit pris d'abord $zz + xz + t = 0$ pour l'une de ces Equations, il est évident que l'autre devra avoir pour second terme $-xz$, puisque le produit de ces deux Equations doit donner une Equation dénuée de second terme ; soit donc pris pour cette seconde Equation $zz - xz + s = 0$ en multipliant ces deux Equations l'une par l'autre, on aura............

$$\begin{array}{llll} z^4 & + s & zz + sxz + ts = 0 \\ & - xx & \quad - tx \\ & + t & \end{array}$$

qui étant comparée avec la proposée donne pour déterminer s, t, x, les trois Equations $s - xx + t = p$; $sx - tx = q$; $ts = r$.

Pour faire usage de ces trois Equations, je multiplie la premiere par x, & je l'ajoute ensuite avec la seconde Equation, j'ai alors $2sx - x^3 = px + q$, d'où je tire $s = \frac{q + px + x^3}{2x}$ que je substitue dans l'Equation $ts = r$, ce qui me donne $t = \frac{2rx}{x^3 + px + q}$.

Or ces deux valeurs de s & de t étant mises dans l'Equation $sx - tx = q$, j'ai enfin.... $\frac{x^3 + px + q}{2} - \frac{2rx^2}{x^3 + px + q} = q$ ou.......

x^6

$$x^6 + 2px^4 + ppx^2 - q^2 = 0$$
$$- 4r$$

Equation du fixiéme dégré, qui par la méthode de l'article XVII. se change en une du troifiéme, d'où la difficulté des Equations du quatriéme dégré eft réduite à celle du troifiéme. Car cette derniere Equation (qu'on appelle la réduite) étant réfolue, on n'aura qu'à fubftituer la valeur de x qu'elle donne dans les Equations $zz - xz + s = 0$, $zz + xz + t = 0$ ou plûtôt $zz - xz + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2x} = 0$ & $zz + xz + \frac{2r}{xx + p + \frac{q}{x}} = 0$, & réfoudre enfuite ces Equations, ou ce qui revient au même fubftituer la valeur de x dans les racines $z = \frac{1}{2}x + \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2x}}$ & $z = -\frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{2r}{xx + p + \frac{q}{x}} + \frac{1}{4}xx}$ de ces deux Equations, & l'on aura les quatre racines cherchées de l'Equation $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$, & partant celles de l'Equation propofée $y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ qui l'avoit produite.

La réfolution d'une Equation du quatriéme dégré dépend d'une Equation du troifiéme.

Cette Equation s'appelle la réduite.

XXVI.

Il paroît d'abord par l'expreffion de ces valeurs que dans le quatriéme dégré ainfi que dans le troifiéme, on ne fçauroit arriver à une feule expreffion pour toutes les racines de

T

l'Equation. Cependant si on remarque que la quantité x que renferment les deux expressions précédentes est nécessairement un radical quarré, puisqu'elle est venue de la résolution d'une Equation où x a toujours une dimension paire, on verra sans peine que chacune des expressions précédentes peut désigner quatre racines, la premiere s'écrivant alors ainsi . . . .

Dans le quatriéme dégré on peut exprimer les quatre racines par une seule formule.

$$z = \pm \tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p \mp \tfrac{q}{2x}}$$, & la

seconde $$z = \mp \tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}xx - \frac{2r}{xx + p \pm \frac{q}{x}}}.$$

Ces deux Equations paroissant d'abord différentes, on peut craindre de s'être trompé dans le raisonnement précédent, puisqu'il semble mener à une absurdité qui seroit d'avoir huit racines pour une Equation du quatriéme dégré ; mais il est aisé de voir qu'elle n'est qu'apparente, car l'identité de ces deux expressions

se réduit à celle de $\sqrt{\tfrac{1}{4}xx - \frac{2r}{xx + p \mp \frac{q}{x}}}$, &

de $\sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$, c'est-à-dire de

$-\tfrac{1}{2}xx - \tfrac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}$ & de $-\frac{2r}{xx + p \mp \frac{q}{x}}$, &

l'identité de ces deux dernieres quantités ne sçauroit manquer d'avoir lieu aussi-tôt que x

a été déterminé par l'Equation $x^6 + 2px^4 + p^2x^2 - q^2 = 0$, puisque cette Equation se
$-4r$
tire tout de suite de l'égalité de $-\frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}$ & de $\frac{2r}{xx + p \mp \frac{q}{x}}$.

XXVII.

Des deux expressions précédentes, la premiere $z = \pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$ étant la plus aisée à employer sera celle qu'il faudra choisir, & les quatre valeurs générales de z qu'elle exprime a la fois sont ....

$$z = \frac{1}{2}x + \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2x}}$$

$$z = \frac{1}{2}x - \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2x}}$$

$$z = -\frac{1}{2}x + \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2x}}$$

$$z = -\frac{1}{2}x - \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2x}}.$$

XXVIII.

Comme l'Equation d'où l'on tire la valeur de x donne nécessairement trois valeurs de x précédées du signe $\pm$, & qu'on n'a aucune

raison pour préferer l'une de ces valeurs aux autres, que d'ailleurs on sçait qu'une Equation du quatriéme dégré ne sçauroit avoir plus de quatre racines, il vient assez naturellement dans l'esprit qu'on peut indifféremment employer celle qu'on voudra de ces trois valeurs de x précédées de $\pm$, & en tirer cependant toujours la même expression pour les quatre valeurs de z.

On arrive aux mêmes racines d'une Equation du quatriéme dégré quelle que soit celle des racines de la réduite qu'on ait prise.

Mais quoiqu'après avoir un peu réfléchi sur la théorie des Equations, on ne puisse gueres douter que cela ne soit ainsi, on doit souhaiter de s'en assurer par le détail du calcul.

Pour y parvenir, ce qui se présente le plus naturellement, c'est de trouver les trois valeurs de x précédées de $+$ que donne l'Equation $x^6 + 2px^4 + ppx^2 - q^2 = 0$, & les substi-
$ -4r$

tuer ensuite l'une après l'autre dans l'expression

$$z = \pm\tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$$ afin de reconnoître l'identité des trois différentes expressions qu'on auroit par ces substitutions; mais le calcul que cette méthode demanderoit est si long, qu'on ne sçauroit se résoudre à le suivre jusqu'au bout. Voici une autre maniere de parvenir au même resultat.

Je remarque d'abord que quelle que soit la valeur de x que je substitue dans l'expression

générale $z = \pm\tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$,

les quatre valeurs de z exprimées à la fois par cette quantité pourront être repréſentées par $i+k$, $i-k$; $-i+l$, $-i-l$: ou ce qui revient au même que les quatre racines de l'Equation $z^4+pzz+qz+r=0$ pourront être repréſentées par $z-i-k$, $z-i+k$, $z+i-l$, $z+i+l$; i déſignant alors la partie $\frac{1}{2}x$ de la valeur de z, & k & l les deux quantités $\sqrt{-\frac{1}{4}xx-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2x}}$ & . . . . . $\sqrt{-\frac{1}{4}xx-\frac{1}{2}p+\frac{q}{2x}}$, multipliant donc ces quatre racines les unes par les autres, j'ai l'Equation

$$\begin{array}{llll} z^4 - 2iiz^2 & - 2ikkz & + i^4 & = 0 \\ - kk & + 2ill & - iikk & \\ - ll & & - iill & \\ & & + kkll & \end{array}$$

qui étant comparée à $z^4+pzz+qz+r=0$ donne les Equations

$$p=-2ii-kk-ll,\ q=-2ikk+2ill,$$
$$r=i^4-iikk-iill+kkll$$

par leſquelles l'Equation $x^6+2px^4+ppx^2 \atop \quad\quad -4r$ $-q^2=0$ ſe change en

$$\begin{array}{llll} x^6 - 4iix^4 & + 8iikkx^2 & - 4iik^4 & = 0 \\ - 2kk & + 8iill & + 8iikkll & \\ - 2ll & + k^4 & & \\ & - 2kkll & - 4iil^4 & \\ & + l^4 & & \end{array}$$

dont les racines ſont $x=\pm 2i$; $x=\pm k \pm l$; $x=\pm k \mp l$; or ſi on ſubſtitue préſentement celle qu'on voudra de ces valeurs de x

dans les quatre expreſſions contenues dans . .

$z = \pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{p}{2} \mp \frac{q}{2x}}$ ou plûtôt dans . . . . $z =$

$$\pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx + ii + \frac{1}{2}kk + \frac{1}{2}ll \mp \frac{ill - ikk}{x}}$$

on verra qu'il en viendra également les quatre valeurs de z ; $i + k$, $i - k$, $-i + l$, $-i - l$.

XXIX.

Outre que par le moyen qu'on vient d'employer, on s'aſſure qu'il eſt indifférent de prendre celle qu'on veut des trois racines de la réduite $x^6 + 2px^4 + pp\,xx - qq = 0$, pour
$ - 4r$
la ſubſtituer dans l'Equation $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$; on a en même-tems l'occaſion de faire une remarque importante ſur les Equations du quatriéme dégré ; c'eſt que leurs racines ſont toujours ou toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires, ou bien, que deux des quatre racines ſont réelles & les deux autres imaginaires. Car il n'eſt pas poſſible de faire d'autres ſuppoſitions pour les quatre racines de l'Equation donnée, auſſi-tôt qu'on eſt aſſuré, comme on vient de l'être, que ces quatre racines ſont toutes exprimées à la fois par la formule . . .

$$\pm \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}.$$

Les racines d'une Equation du quatriéme dégré ſont toutes réelles ou toutes imaginaires ou deux réelles & deux imaginaires.

XXX.

En voyant cette valeur des racines des Equations du quatriéme dégré, on croiroit d'abord, à cause que x est un radical quarré, que lorsque que quelques-unes de ces racines sont imaginaires, ce pourroit être des imaginaires d'une autre nature que ceux du second dégré, c'est-à-dire qu'au lieu d'être simplement la somme d'une quantité réelle & de la racine d'une quantité réelle, mais négative, telle par exemple qu'est $a+\sqrt{-b}$, ce pourroit être des quantités composées de racines imaginaires simples & de la racine d'autres quantités en partie réelle & en partie imaginaires comme seroit $\sqrt{-b+\sqrt{a+\sqrt{-b}}}$, mais on peut s'assurer aisément que toutes les racines imaginaires du quatriéme dégré peuvent se réduire, ainsi que celles du second, à la somme de quantités réelles & de la racine de quantités réelles & négatives. Car ayant vû tout à l'heure que lorsqu'on veut trouver la valeur de z on peut choisir à volonté entre les valeurs de xx que donne la réduite, & remarquant d'ailleurs par la théorie des Equations que cette réduite qui a toujours pour dernier terme ou produit des racines, une quantité qq négative, doit par conséquent avoir nécessairement une valeur de xx positive, on verra que x pourra toujours être une quantité réelle, & que dans ce cas lorsque

Les racines imaginaires du quatriéme dégré sont de même nature que celles du second

$\sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$ fera imaginaire, ce ne fera autre chofe que la racine d'une quantité réelle & négative.

XXXI.

Lorſque des quatre racines deux ſont réelles & deux imaginaires, on réſout exactement l'Equation.

Une autre remarque que peut fournir encore l'art. XXVIII. c'eſt que toutes les fois que des quatre racines deux ſeront imaginaires & deux réelles, la réduite

$$x^6 + 2px^4 + ppx^2 - qq = 0$$
$$\qquad\qquad\qquad - 4r$$

ſera du nombre des Equations exactement réſolues par la formule de l'article VI, c'eſt-à-dire qu'on arrivera alors à la ſolution complete de l'Equation $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$.

C'eſt le contraire lorſque les quatre racines ſont toutes réelles ou toutes imaginaires.

Au contraire lorſque les quatre racines ſeront ou toutes réelles ou toutes imaginaires l'Equation réduite ne pourra pas ſe réſoudre par la formule de l'article VI, & par conſequent l'on ne parviendra pas par ce moyen à la ſolution de l'Equation $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$.

Ces deux vérités ſe tirent de ce que la réduite

$$\begin{array}{llll} x^6 - 4iix^4 & + 8iikkx^2 & - 4iik^4 & = 0 \\ \quad - 2ll & + 8iill & + 8iikkll & \\ \quad - 2kk & + k^4 & - 4iil^4 & \\ & - 2kkll & & \\ & + l^4 & & \end{array}$$

eſt le produit des trois racines $xx - 4ii$, $xx - kk - 2kl - ll$, $xx - kk + 2kl - ll$; or ſi l'une des deux quantités k ou l ſeulement eſt imaginaire les deux racines $xx - kk - 2kl - ll$, $xx - kk + 2kl - ll$ ſont imaginaires, &

par conſéquent la réduite eſt alors réſoluble par la formule de l'article VI.

Si au contraire k & l ſont toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires, les trois racines $xx - 4ii$, $xx - kk - 2kl - ll$, $xx - kk + 2kl - ll$ de la réduite ſeront toutes trois réelles, & par conſéquent la formule de l'article VI ne pourra par les donner, ainſi dans le quatriéme dégré comme dans le troiſiéme, les formules de la réſolution ne ſçauroient s'appliquer qu'aux Equations qui ont deux racines imaginaires.

XXXII.

Maniere de diſtinguer le cas des quatre racines réelles de celui des quatre imaginaires.

Lorſqu'on aura une Equation du quatriéme dégré à réſoudre & qu'on aura formé par ſon moyen la réduite $x^6 - 2px^4 + ppx^2 \begin{matrix} -qq \\ -4r \end{matrix} = 0$, ſi on trouve qu'elle échappe à la formule de l'article VI, & qu'on ſe propoſe de ſçavoir ſi alors les quatre racines ſont réelles ou ſi elles ſont toutes quatre imaginaires, on y parviendra aiſément en partant des deux réfléxions ſuivantes qui ſe préſentent aſſez naturellement en examinant la réduite de l'article XXVIII.

1°. Lorſque les quatre racines ſont réelles la réduite

$$x^6 \begin{matrix} -4ii \\ -2kk \\ -2ll \end{matrix} x^4 \begin{matrix} +8iikk \\ +8iill \\ +k^4 \\ -2kkll \\ +l^4 \end{matrix} x^2 \begin{matrix} -4iik^4 \\ +8iikkll \\ -4iil^4 \end{matrix} = 0 \text{ ou}$$

Conditions des quatre racines réelles.

$x^6 - 2 \times \overline{2ii + kk + ll} \times x^4 + \overline{8ii \times \overline{kk + ll} + \overline{kk - ll}^2} \times x^2 - 4ii \times \overline{kk - ll}^2 = 0$ a néceſſairement un ſecond terme négatif & un troiſiéme terme poſitif, puiſque $-2 \times \overline{2ii + kk + ll}$ ne ſçauroit être ni zero ni poſitif tant que i, k, l, ſont des quantités réelles, & que $8ii \times \overline{kk + ll} + \overline{kk - ll}^2$ ne ſçauroit non plus être ni zero ni négatif dans les mêmes conditions.

2°. Si au contraire les quatre racines ſont imaginaires, ou ce qui revient au même ſi kk & ll ſont négatifs, la réduite qui doit alors s'écrire ainſi

$$\begin{array}{llll} x^6 - 4iix^4 & - 8iikkx^2 & - 4iik^4 = 0 & \text{ou} \\ \quad + 2kk & - 8iill & + 8iikkll & \\ \quad + 2ll & + k^4 & - 4iil^4 & \\ & - 2kkll & & \\ & + l^4 & & \end{array}$$

Conditions des quatre racines imaginaires.

$x^6 + 2 \times \overline{kk + ll - 2ii} \times x^4 + \overline{\overline{kk + ll} \times \overline{kk + ll - 8ii} - 4kkll} \times x^2 - 4ii \times \overline{kk - ll}^2$ ne ſçauroit jamais avoir à la fois, & le ſecond terme négatif & le troime poſitif. Car ſi $kk + ll$ eſt plus petit que $2ii$, ce qui rendroit le ſecond terme négatif, le troiſiéme terme $\overline{kk + ll} \times \overline{kk + ll - 8ii} - 4kkll$ ſera néceſſairement négatif.

XXXIII.

Toute Equation du quatriéme dégré ſans ſecond terme, & qui

L'inſpection de l'Equation . . . .

$$\begin{array}{llll} z^4 & - 2iiz^2 & - 2ikkz & - \text{\&c.} \\ & - kk & + 2ill & \\ & - ll & & \end{array}$$

donnée dans

le même article XXVIII. fournit une remarque, par laquelle on peut reconnoître en quelques rencontres ſi une Equation qui doit avoir ſes quatre racines ou toutes réelles ou toutes imaginaires, eſt dans le premier de ces deux cas ou dans le ſecond. C'eſt que toute Equation du quatriéme dégré dont le ſecond terme eſt évanoui, & dont le troiſiéme eſt poſitif, doit avoir néceſſairement des racines imaginaires, puiſque le troiſiéme terme de toutes ces Equations repréſenté par $\overline{-2ii+kk+ll} \times zz$, ne ſçauroit jamais être poſitif tant que ii, kk, ll, feront poſitifs : c'eſt-à-dire tant que les racines feront réelles. Or, dès qu'on ſçaura qu'une Equation du quatriéme dégré a des racines imaginaires, & qu'on aura reconnu d'ailleurs qu'elle doit avoir ſes quatre racines ou toutes réelles ou toutes imaginaires, on ne ſera plus embarraſſé à ſçavoir lequel de ces deux cas a lieu.

a le troiſiéme poſitif, a des racines imaginaires.

XXXIV.

Lorſqu'on aura reconnu que les quatre racines d'une Equation du quatriéme dégré ſont réelles, avant d'entreprendre de réſoudre par approximation ſa réduite pour avoir la valeur de x à ſubſtituer dans celle de z; il ſera à propos d'examiner par les méthodes de la troiſiéme Partie ſi quelques-unes de ſes racines ne feroient pas commenſurables. S'il n'y en avoit qu'une, on n'en ſeroit gueres plus avancé pour avoir les trois autres, puiſque

alors il resteroit à résoudre une Equation du troisiéme dégré, dont les trois racines seroient réelles. Mais si l'Equation du quatriéme dégré avoit deux racines commensurables, elle seroit résolue aussi-tôt que ces deux racines seroient trouvées, parce qu'alors il ne resteroit plus qu'une Equation du second dégré à résoudre.

XXXV.

Avantage qu'on trouve à chercher les diviseurs commensurables dans la réduite plûtôt que dans la proposée.

Lorsqu'une Equation du quatriéme dégré a deux racines commensurables, on peut les reconnoître plus aisément par sa réduite que par elle-même, car il est clair alors que dans les quatre valeurs de z représentées généralement par $i + k$; $i - k$; $-i + l$; $-i - l$; i ne pourra jamais être qu'une quantité commensurable, & partant dans la racine $xx - 4ii$ de la réduite, $4ii$ représentera une quantité quarrée & commensurable; or par cette réflexion on peut diminuer beaucoup les tentatives nécessaires dans la méthode de la troisiéme Partie, article XII & XIII puisqu'il ne faudra chercher dans les diviseurs du dernier terme qu'une quantité quarrée, & prise avec le signe $-$.

Il en seroit de même si l'Equation $z^4 + pzz + qz + r = 0$ devoit se décomposer en deux Equations du second dégré dont les coefficiens fussent commensurables, au lieu d'employer alors la méthode de la troisiéme Partie, article XIX, il faudra employer celle de l'article XII & XIII pour chercher les divi-

ſeurs de la réduite, & ne choiſir parmi les diviſeurs du dernier terme que les quantités quarrées & affectées du ſigne —.

XXXVI.

Lorſqu'une Equation où x eſt au quatriéme dégré a deux racines commenſurables ou qu'elle eſt ſimplement compoſée de deux diviſeurs de deux dimenſions, on peut dire qu'elle n'eſt pas véritablement du quatriéme dégré, & il eſt bien ſimple alors qu'elle ſe réſolve par la méthode du ſecond dégré; mais il y a des Equations abſolument du quatriéme dégré qui ſe réduiſent cependant à la méthode du ſecond dégré. Telles ſont les Equations traitées dans la quatriéme Partie, article xx & les Equations ſemblables à

$$z^4 \begin{array}{l}+2aa\\-4ab\end{array} zz \begin{array}{l}-8aab\\-4a^3b\end{array} z + c^4 = 0,$$

qui eſt le produit des deux Equations $zz - 2z\sqrt{ab} + aa - 2a\sqrt{ab} = 0$ & $zz + 2z\sqrt{ab} + aa + 2a\sqrt{ab} = 0$, & qui a pour ſes quatre racines $\pm\sqrt{ab} + \sqrt{ab - a^2 \pm 2a\sqrt{ab}}$, dans leſquelles il n'entre point d'autres radicaux que ceux du ſecond dégré.

On peut diſtinguer aiſément toutes les Equations qui ſont dans ce cas; car puiſque dans ces Equations la partie $\pm\frac{1}{2}x$ de l'expreſſion $\pm\frac{1}{2}x + \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$ de la va-

Maniere de connoitre les Equations du quatriéme dégré, dont les racines n'ont point d'autres radi-

eaux que ceux du second dégré.

leur de z, ou ce qui revient au même la partie i commune aux quatre racines $i+k$, $i-k$, $-i+l$, $-i-l$, doit être un simple radical du second dégré, à cause que x ne monte qu'à des dimensions paires dans la réduite; il faut nécessairement que dans toutes les Equations de cette nature la réduite soit divisible par $xx\pm$ une quantité commensurable, or les diviseurs de cette espece sont aisés à trouver par la méthode de l'article XII & XIII de la troisiéme Partie.

XXXVII.

Ce qu'il faut faire pour avoir les valeurs approchées des quatre racines, lorsqu'elles sont réelles.

Lorsqu'on aura reconnu que les quatre racines d'une Equation du quatriéme dégré sont toutes réelles, & que cette Equation n'a aucun diviseur commensurable ni affecté de radicaux du second dégré; on cherchera une des racines de sa réduite par la méthode d'approximation enseignée article XXI, & après l'avoir substituée à la place de x dans la formule générale $z=\pm\frac{1}{2}x\pm\sqrt{-\frac{1}{4}xx-\frac{1}{2}p\pm\frac{q}{2x}}$, on aura les valeurs approchées des quatre racines cherchées.

XXXVIII.

Application des méthodes précédentes à un exemple

Dans la vûe d'appliquer les regles précédentes, soit pris pour exemple l'Equation $z^4+3z^2+2z-3=0$. En comparant cette Equation à l'Equation générale $z^4+pz^2+qz+r=0$, on aura $p=3$, $q=2$, $r=-3$. Et ces valeurs

étant ſubſtituées dans la réduite générale . . $x^6 + 2px^4 + \overset{pp}{\underset{-4r}{}}xx - qq = 0$, la changeront en $x^6 + 6x^4 + 21x^2 - 4 = 0$.

Pour réſoudre cette Équation ſoit d'abord fait $x^2 = u - 2$, afin de faire évanouir le ſecond terme & la réduite ſe changera en $u^3 + 9u - 30 = 0$, laquelle ſuivant l'article XIV. eſt de celles qui n'ont qu'une racine de réelle, & eſt par conſéquent dans le cas d'être réſolue par la formule générale de l'article VI. d'où l'on voit que l'Équation propoſée aura deux racines réelles & deux imaginaires, & qu'on parviendra par conſéquent à les exprimer toutes les quatre par les formules précédentes.

On auroit pû reconnoître (article XXXIII.) que cette Equation devoit avoir des racines imaginaires par cela ſeul que ſon troiſiéme terme $3z^2$ avoit un coefficient poſitif.

Réſolvant maintenant l'Équation $u^3 + 9u - 30 = 0$ par la formule de l'article VI. on a pour ſa racine réelle $u = \sqrt[3]{15 + 6\sqrt{7}} + \sqrt[3]{15 - 6\sqrt{7}}$, donc $\pm\sqrt{u - 2}$ ou . . . .

$x = \pm\sqrt{\sqrt[3]{15 + 6\sqrt{7}} + \sqrt[3]{15 - 6\sqrt{7}} - 2}$.

Si on ſubſtitue enſuite cette valeur de x dans la valeur générale . . . .

$z = \pm\frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{p}{2} \mp \frac{q}{2x}}$ qui eſt

dans le cas préſent $z = \pm\frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{3}{2} \mp \frac{1}{x}}$

on aura pour les deux racines réelles de l'Equation proposée

$$z = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{15}+6\sqrt{7}}+\sqrt[3]{\sqrt{15}-6\sqrt{7}}-2}$$

$$\pm\sqrt{-\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{\sqrt{15}+6\sqrt{7}}-\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{\sqrt{15}-6\sqrt{7}}-1+\frac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{15}+6\sqrt{7}}+\sqrt[3]{\sqrt{15}-6\sqrt{7}}-2}}}$$

& pour les deux imaginaires

$$z = +\tfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{15}+6\sqrt{7}}+\sqrt[3]{\sqrt{15}-6\sqrt{7}}-2}$$

$$\pm\sqrt{-\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{\sqrt{15}+6\sqrt{7}}-\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{\sqrt{15}-6\sqrt{7}}-1-\frac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{15}+6\sqrt{7}}+\sqrt[3]{\sqrt{15}-6\sqrt{7}}-2}}}.$$

XXXIX.

Autre exemple.

Soit présentement l'Equation $z^4 - 6z^2 + 8z - 1 = 0$, en la comparant à l'Equation générale on en tirera $p = -6, q = 8, r = -1$. Et partant, la réduite sera $x^6 - 12x^4 + 40x^2 - 64 = 0$, dans laquelle faisant $x^2 = u + 4$, afin que le second terme disparoisse, on aura $u^3 - 8u - 32 = 0$ qui étant comparée à la formule générale de l'article VI donnera une seule valeur réelle laquelle sera . . . . . .

$$\sqrt[3]{16+\frac{80}{3\sqrt{3}}}+\sqrt[3]{16-\frac{80}{3\sqrt{3}}} \text{ ou}$$

$$u = \frac{\sqrt[3]{2\sqrt{6\sqrt{3}}+10}+\sqrt[3]{2\sqrt{6\sqrt{3}}-10}}{\sqrt{3}}$$ qui en se servant de la méthode de la quatriéme Partie, article XXXV. se réduit à . . . .

u

$u = \frac{2 \times \overline{1+\sqrt{3}} - 2 \times \overline{1-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = 4$, ſubſtituant préſentement cette valeur de u dans $x = \sqrt{u+4}$, on aura $x = \sqrt{8}$, par laquelle on changera l'Equation générale . . . .

$z = \pm \frac{1}{2} x \pm \sqrt{-\frac{1}{4} xx - \frac{p}{2} \mp \frac{q}{2x}}$ en . . . :

$z = \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{1 \mp \sqrt{2}}$ qui donne pour les deux racines réelles de l'Equation propoſée $-\sqrt{2} \pm \sqrt{1+\sqrt{2}}$, & pour les deux imaginaires $+\sqrt{2} \pm \sqrt{1-\sqrt{2}}$. Ainſi l'Equation propoſée $z^4 - 6z^2 + 8z - 1 = 0$ eſt de celles qui peuvent ſe décompoſer en deux Equations du ſecond dégré, dont les coefficiens ſont incommenſurables, car chacune des doubles racines précédentes ſont les racines des Equations $zz + 2z\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 0$ & $zz - 2z\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 0$.

On auroit pû ſans appliquer la formule de l'article VI, & par conſéquent ſans avoir beſoin de la méthode de la quatriéme Partie, article XXXV. réſoudre l'Equation $x^6 - 12x^4 + 40x^2 - 64 = 0$, en employant la méthode de la troiſiéme Partie, articles XII & XIII. car on auroit trouvé, par cette méthode, que cette Equation avoit pour diviſeur $xx - 8 = 0$.

XL.

Soit l'Equation $y^4 + 16y^3 + 99y^2 + 228y + 144 = 0$ en ſubſtituant dans cette Equation Troiſiéme exemple.

V

$z-4$ pour y afin de faire évanouir le ſecond terme, on la changera en $z^4+3z^2-52z+48=0$ qui étant comparée à l'Equation générale $z^4+pz^2+qz+r=0$ donnera $p=3$; $q=-52$; $r=48$, & partant la réduite $x^6+6x^4-183x^2-2704=0$, de laquelle faiſant évanouir le ſecond terme par la ſubſtitution de $u-2$ à la place de x^2 on tirera $u^3-195u-2322=0$ qui eſt réſoluble par la formule de l'article VI, & fait voir par conſéquent que l'Equation propoſée eſt de celles qu'on peut réſoudre exactement, c'eſt-à-dire de celles qui ont deux racines réelles & deux racines imaginaires. Pour les trouver, ſoit donc employée la formule de l'article VI. à réſoudre l'Equation $u^3-195u=2322=0$, on aura pour la ſeule valeur réelle qu'elle donne . . . .

$$u=\sqrt[3]{1161+\sqrt{1073296}}-\sqrt[3]{-1161+\sqrt{1073296}}$$

qui ſe réduit à

$$\sqrt[3]{1161+1036}-\sqrt[3]{-1161+1036}$$ ou

à $\sqrt[3]{2197}+\sqrt[3]{125}$, ou enfin à 18; ſubſtituant préſentement cette valeur de u dans $x=\sqrt{u-2}$ on a $x=\sqrt{16}=4$ qu'il ne s'agit plus que de ſubſtituer dans la valeur générale de $z=\pm\frac{1}{2}x$ $\pm\sqrt{-\frac{1}{4}xx-\frac{p}{2}\mp\frac{q}{2x}}$. On aura par cette ſubſtitution pour les deux racines réelles de l'Equation $z^4+3z^2-52z+48=0$; $z=2$ $\pm\sqrt{-4-\frac{3}{2}+\frac{13}{2}}$ ou $z=2\pm1$, c'eſt-à-

dire ou 3 ou 1, & pour les deux racines imaginaires $z = -2 \pm \sqrt{-4 - \frac{3}{2} - \frac{13}{2}}$ ou $z = -2 \pm \sqrt{-12}$. Substituant ensuite ces quatre valeurs dans $y = z - 4$, on aura pour les quatre racines de l'Equation proposée $y^4 + 16y^3 + 99y^2 + 228y + 144 = 0$; $y = -1$; $y = -3$; $y = -6 \pm \sqrt{-12}$. On auroit pû trouver ces racines tant par la méthode de la troisiéme Part. art. XII & XIII. que par celle de l'art. XXIV. de la même Partie en les cherchant dans l'Equation $y^4 + 16y^3 + 99y^2 + 228y + 144 = 0$. Car par la premiere de ces méthodes on auroit trouvé les diviseurs simples $y + 1$; $y + 3$, & pour quotient $yy + 12y + 48$, & la seconde auroit donné les deux diviseurs de deux dimensions $yy + 4y + 3$, & $yy + 12y + 48$; on auroit encore pû trouver ces racines bien facilement en cherchant les diviseurs de la réduite par le moyen de la méthode des art. XII & XIII de la troisiéme Partie, & en ajoutant à cette méthode l'attention de ne choisir parmi les diviseurs du nombre 2704 que des nombres quarrés, & de ne les employer qu'avec le signe $-$. On auroit trouvé alors que cette réduite a pour diviseur de cette espece $xx - 16 = 0$ qui donne $x = 4$.

XLI.

Soit l'Equation $z^4 + 11z^2 - 2z + 56 = 0$ en la comparant à $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ il vient $p = 11$, $q = -2$, $r = 56$. D'où la ré-

duite eſt $x^6+22x^4-103x^2-4=0$ qui devient $u^3-\frac{793}{3}u+\frac{41582}{27}=0$, après avoir fait évanouir le ſecond terme. Cette Equation étant de celles qui échappent à la formule de l'article VI. l'Equation propoſée doit être ou de celles qui ont leurs quatre racines réelles, ou de celles qui les ont toutes quatre imaginaires; mais à cauſe du terme poſitif $11z^2$, il faut (article XXXIII.) qu'il y ait des racines imaginaires, donc toutes les quatre racines le ſont. Je parviens enſuite à réduire ces quatre racines imaginaires à de ſimples racines imaginaires du ſecond dégré en cherchant par la méthode des articles XII & XIII. de la troiſiéme Partie, les diviſeurs de la réduite, car trouvant $xx-4$ pour diviſeur de cette réduite, je vois auſſi-tôt que les quatre racines de l'Equation propoſée ſont $z=+1\pm\sqrt{-6}$ & $z=-1\pm\sqrt{-7}$.

XLII.

Soit maintenant l'Equation $z^4-5z^2+4z+29=0$ qui donne par ſa comparaiſon avec $z^4+pz^2+qz+r=0$; $p=-5$; $q=4$; $r=29$, & par conſéquent la réduite $x^6-10x^4-91x^2-16=0$, laquelle en faiſant $x^2=u+\frac{10}{3}$ ſe changera en $u^3-\frac{373}{3}u-\frac{10622}{27}=0$. Or comme cette Equation eſt de celles que la formule de l'art. VI ne ſçauroit réſoudre, c'eſt-à dire de celles qui ont leurs trois racines réelles, il s'enſuit que les racines cherchées de l'Equation $z^4-5z^2+4z+29=0$ ſont ou toutes

quatre réelles ou toutes quatre imaginaires. Et si on se rappelle qu'on a vû article XXXII. que lorsque les racines sont toutes réelles, la réduite a le second terme négatif, le troisiéme positif, &c. on en conclura que la proposée est dans le cas d'avoir toutes ses racines imaginaires à cause que le troisiéme terme $-91x^2$ de sa réduite est négatif.

Mais par aucune méthode connue, on ne sçauroit parvenir ainsi que dans l'exemple précédent à donner à ces quatre racines imaginaires, la forme ordinaire des racines imaginaires du second dégré, parce que la réduite n'ayant aucun diviseur commensurable, la proposée ne sçauroit avoir ni des diviseurs commensurables, ni des diviseurs affectés de simples radicaux du second dégré.

XLIII.

Soit l'Equation $z^4 - 32zz - 16z - 2 = 0$. qui donne $p = -32$, $q = -16$, $r = -2$, & par conséquent la réduite $x^6 - 64x^4 + 1032x^2 - 256 = 0$. Sixiéme exemple.

Cette réduite ayant, comme on peut aisément s'en assurer, ses trois racines réelles fait voir que la proposée doit avoir toutes ses racines réelles ou toutes imaginaires; on s'assurera facilement que c'est le premier de ces deux cas qui a lieu en ayant recours à l'article XXXII. Je cherche maintenant par la méthode des art. XII & XIII. de la troisiéme Partie les diviseurs de cette réduite, & je trouve

$xx - 32$; qui au moyen de l'expression générale $z = \pm \frac{1}{2}x + \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$ donne pour les quatre racines cherchées . . . . $2\sqrt{2} + \sqrt{8 + \sqrt{2}}$, $2\sqrt{2} - \sqrt{8 + \sqrt{2}}$, $-2\sqrt{2} + \sqrt{8 - \sqrt{2}}$, $-2\sqrt{2} - \sqrt{8 - \sqrt{2}}$.

XLIV.

Septiéme exemple.

Soit présentement l'Equation $z^4 - 18z^2 + z + 70 = 0$ qui donne la réduite $x^6 - 36x^4 + 44x^2 - 1 = 0$ ou $u^3 - 388u - 2929 = 0$; en faisant évanouir le second terme par le moyen de la transformée $x^2 = u + 12$.

Or comme cette Equation a ses trois racines réelles, & que le second terme $36x^4$ est négatif, tandis que le troisiéme $44x^2$ est positif, il s'ensuit par l'article XXXII. que la proposée a ses quatre racines réelles ; de plus la réduite n'ayant aucun diviseur commensurable, ainsi qu'on peut s'en assurer par la méthode des art. XII & XIII. de la troisiéme Partie, il faut se contenter de trouver par approximation les racines cherchées.

Pour cela, on commencera par employer la méthode de l'article XXI. à la résolution de l'Equation $u^3 - 388u - 2929 = 0$, & ayant trouvé 22, 74 pour la valeur de u, on substituera cette valeur dans $x = \sqrt{u + 12}$, ce qui donnera 5, 894 pour x, & en substituant cette valeur de x dans . . . . . .

$z = \pm \frac{1}{2} x \sqrt{\pm - \frac{1}{4} xx - \frac{1}{2} p \mp \frac{q}{2x}}$, on aura pour les quatre racines cherchées; $+3,426$; $+2,467$; $-2,315$; $-3,579$ qui seront fort proches des vrayes; on en auroit eu de plus exactes si on avoit poussé plus loin la méthode de l'article XXI. pour résoudre l'Equation $u^3 - 388u = 2929$.

XLV.

Après avoir vû dans les résolutions des Equations, tant du second que du troisiéme & du quatriéme dégré, comment à l'aide des signes radicaux, on parvient à exprimer la valeur de l'inconnue dans ces Equations, il peut venir dans l'esprit de chercher comment on retrouveroit les Equations dont on connoît les racines par une expression radicale, on peut se proposer, par exemple, de sçavoir quelle est l'Equation dont la racine seroit $x = \sqrt[4]{ab^3} + \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{a^2c}$; celle dans laquelle x seroit $\sqrt[3]{a^3 + b^3} - \sqrt[3]{a^3 - b^3}$ &c.

Pour résoudre tous les Problêmes de ce genre ou ce qui revient au même pour faire évanouir les radicaux d'une Equation quelconque, on s'y prendra de la maniere suivante qui étoit bien aisée à imaginer après ce qui a été enseigné dans la deuxiéme Partie, article XXXV.

On mettra à la place de chaque radical Maniere de

faire évanouir les radicaux d'une Equation quelconque,

une inconnue, & l'on aura par ce moyen, 1°. Au lieu de l'Equation donnée une nouvelle Equation qui ne contiendra plus de radicaux; 2°. Autant d'Equations à deux termes qu'il y avoit de radicaux dans l'Equation proposée. Or chacune de ces Equations à deux termes sera délivrée tout de suite de ses radidicaux en élevant ses deux membres à la puissance indiquée par l'exposant du signe radical que l'un de ses deux termes contiendra. Donc il n'y aura plus qu'à chasser de toutes ces Equations délivrées de radicaux les inconnues introduites, opération que l'on a enseigné à l'article XXXV. de la seconde Partie.

Exemple.

Pour éclaircir ce qu'on vient de dire par un exemple, soit proposé de faire évanouir les radicaux de l'Equation $x = \sqrt[3]{ab^2} + \sqrt[3]{add}$, ayant fait $\sqrt{ab^2} = y$ & $\sqrt{add} = z$, on aura les trois Equations $x = y + z$; $y^3 = ab^2$, $z^3 = ad^2$, tirant de la premiere $y = x - z$, & la substituant dans la seconde, on aura $x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - z^3 = ab^2$, de laquelle, avec le secours de l'Equation $z^3 = ad^2$, il ne s'agit plus que de chasser z.

Pour cela, je commence par mettre dans la premiere de ces deux Equations $x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - z^3 = ab^2$ à la place de z^3, ab^2 que donne la seconde; & elle devient $x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - ad^2 = ab^2$, de laquelle je tire $z^2 = \frac{ad^2 + ab^2 - x^3 + 3x^2z}{3x}$: multipliant ensuite les deux membres de cette Equation par z, &

mettant à la place de z^3 ſa valeur ad^2 j'ai une nouvelle Equation . . . . $ad^2 = \frac{ad^2z + ab^2z - x^3z + 3x^2zz}{3x}$ qui donne . . . $zz = \frac{3ad^2x - ad^2z - ab^2 + x^3z}{3x^2}$.

J'égale alors ces deux valeurs de zz, & j'en tire une Equation où z n'eſt plus qu'au premier dégré, je la réſous & j'ai . . . $z = \frac{x^4 + 2ad^2x - ab^2x}{ab^2 + ad^2 + 2x^3}$ qui étant ſubſtitué dans l'une des précédentes, par exemple dans $x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - ad^2 = ab^2$, donne enfin l'Equation $x^9 - a^3d^2x^6 - 3ab^2x^6 + 3a^2b^4x^3 + 3a^2d^4x^3 - 21a^2d^2b^2x^3 = a^3b^6 + 3a^3b^4d^2 + 3a^3d^4b^2 + a^3d^6$, qui ne contient d'autre inconnnue que celle qui étoit dans la propoſée, & qui eſt délivrée de toute quantité radicale ; on ſe tireroit de la même maniere de quelque Equation qu'on eût.

Quelquefois les Equations propoſées ſont ſi aiſées à délivrer des radicaux qu'il eſt inutile d'avoir recours à la méthode précédente, & qu'il ſuffit de tranſpoſer les termes & d'élever les deux membres à la puiſſance indiquée par le radical qui eſt ſeul alors dans un des membres ; par exemple ſi on avoit l'Equation $x = y + \sqrt[3]{a^3 + \sqrt{a^5x}}$, en paſſant y de l'autre côté, & élevant les deux membres à la troi-

ſiéme puiſſance, on aura une Equation qui ne contiendra plus d'autre radical que $\sqrt{a^3x}$ mettant alors ce terme ſeul d'un côté & élevant les deux membres au quarré, on aura une Equation qui ne contiendra plus de radicaux : & il en ſeroit de même dans beaucoup de rencontres.

FIN.

EXTRAIT DES REGISTRES
de l'Académie Royale des Sciences.

Dû 20. Juillet 1746.

MEssieurs NICOLE & BOUGUER qui avoient été nommés pour examiner *des Elemens d'Algebre* composés par Mr. Clairaut, en ayant fait leur rapport, la Compagnie a jugé cet Ouvrage digne de l'Impression, en foi de quoi j'ai signé le présent Certificat, à Paris ce 5. Août 1746.

GRANDJEAN DE FOUCHY.
Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, grand Conseil, Prevôts de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers, qu'il appartiendra, SALUT. Notre ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES Nous a très-humblement fait exposer, que depuis qu'il Nous a plû lui donner par un Réglement nouveau de nouvelles marques de notre affection, Elle s'est appliquée avec plus de soin à cultiver les Sciences, qui font l'objet de ses exercices ; ensorte qu'outre les Ouvrages qu'elle a déja donnés au Public, elle seroit en état d'en produire encore d'autres, s'il Nous plaisoit lui accorder de nouvelles Lettres de Privilége, attendu que celles que Nous lui avons accordées en datte du six Avril 1693. n'ayant point eû de tems limité, ont été déclarées nulles par un Arrêt de notre Conseil d'Etat, du 13. Août 1704. celles de 1713. & celles de 1717. étant aussi expirées; & désirant donner à notredite Académie en corps & en particulier, & à chacun de ceux qui la composent, toutes les facilités & les moyens qui peuvent contribuer à rendre leur travaux utiles au Public, Nous avons permis & permettons par ces Présentes à notredite Académie, de faire vendre ou débiter dans tous les lieux de notre obéïssance, par tel Imprimeur ou Libraire qu'elle voudra choisir, *Toutes les Recherches ou Observations journalieres, ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les assemblées de notredite Académie Royale des Sciences ; comme aussi les Ouvrages, Mémoires, ou Traités de chacun des Particuliers qui la composent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner lesdits Ouvrages, & jugé qu'ils sont dignes de l'impression ;* & ce pendant

le tems & espace de quinze années consécutives, à compter du jour de la date desdites Présentes. Faisons défenses à toutes personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en intrcduire d'impression étrangére dans aucun lieu de notre obéissance: comme aussi à tous Imprimeurs-Libraires, & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire aucun desdits Ouvrages ci-dessus spécifiés, en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns extraits, sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, changement de titre, feuilles même séparées, ou autrement, sans la permission expresse & par écrit de notredite Académie, ou de ceux qui auront droit d'Elle, & ses ayans cause, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de dix mille livres d'amende contre chacun des Contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers au Dénonciateur, & de tous dépens, dommages & intérêts: à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris; dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, & que notredite Académie se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725. & qu'avant que de les exposer en vente, les Manuscrits ou Imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvrages, seront remis dans le même état, avec les Approbations & Certificats qui en auront été donnés, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France, le sieur Chauvelin: & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires de chacun dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France le sieur Chauvelin: le tout à peine de nullité des Présentes; du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir notredite Academie, ou ceux qui auront droit d'Elle & ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il

leur soit fait aucun trouble ou empêchement : Voulons que la Copie desdites Présentes qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour dûement signifiée, & qu'aux Copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers & Sécrétaires foi soit ajoutée comme à l'Original : Commandons au premier notre Huissier ou Sergent de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires : Car tel est notre plaisir. Donné à Fontainebleau le douziéme jour du mois de Novembre mil sept cent trente-quatre, & de notre Regne le vingtiéme. Par le Roi en son Conseil

Signé, SAINSON.

Registré sur le Registre VIII. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, num. 792. fol. 775. conformément aux Reglemens de 1723. qui font défenses, Art. IV. à toutes personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, autres les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter & afficher aucuns Livres pour les vendre en leur nom, soit qu'ils s'en disent les Auteurs ou autrement, & à la charge de fournir les Exemplaires prescrits par l'Art. CVIII. du même Réglement. A Paris le 15. Novembre 1734.

G. MARTIN, Syndic.

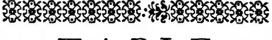


TABLE
DES MATIERES.

PREMIERE PARTIE.

De la Méthode Algébrique d'exprimer les Problêmes par des Equations, & de la résolution des Equations du premier dégré.

XXIX.

SECONDE PARTIE.

De la résolution des Equations du second dégré.

TROISIE'ME PARTIE.

Où l'on donne quelques principes généraux pour les Equations de tous les dégrés, avec la méthode de tirer de ces Equations, celles du premier & du second dégré qu'elles peuvent renfermer.

QUATRIE'ME PARTIE.

Résolution des Equations de dégrés quelconques lorsqu'elles n'ont que deux termes, ou lorsqu'en ayant trois elles peuvent se réduire à celles qui n'en ont que deux par la méthode des Equations du second dégré, avec différentes opérations nécessaires pour ces Equations, comme l'extraction des racines, la réduction des quantités radicales &c.

CINQUIE'ME PARTIE.

Résolution des Equations du troisiéme & du quatriéme dégré.

Fin de la Table.

FAUTES A CORRIGER.

PAge 3 à la ſeconde apoſtille au lieu de × mettés $+$.

4 lig. 5, $-\frac{3}{2}x$ liſés $-\frac{2}{3}x$.

lig. 11, *changé*, liſés *changée*.

7 lig. 6, $2y + a + \frac{1}{3}x$, liſés $2x + \frac{1}{3}x$.

lig. 12, 1800, liſés 180.

lig. 26, $\frac{15960}{7} = 228$, liſés $\frac{15960}{7} = 2280$.

lig. 30, 3326, liſés 3220.

13 lig. 6, 22, 23, 24 au lieu de 53200 liſés 5320.

14 lig. 10, 359, liſés 399.

lig. 13, $\frac{2}{3}$, liſés $\frac{2}{9}$.

18 lig. 11, $\frac{2x+6}{3}$, liſés $\frac{2x+16}{3}$.

lig. 12, $x-3$, liſés $\frac{x-3}{2}$.

lig. derniere $+2$, liſés $+8$.

19 à la fin de la premiere ligne ajoutés *le*.

21 lig. 16, changés réciproquement les mots *heures & lieues*.

26 lig. 5 & 6 changés réciproquement les mots *ſecond & premier*.

lig. 10, *ajoute*, liſés *ajouté*.

27 lig. 19, au lieu de 41, liſés 21.

lig. 23, 5/[illegible], liſés $\frac{5}{7}$.

28 lig. 9, *on*, liſés *ou*.

34 lig. 20, *tres*, liſés *autres*.

37 lig. 27, *ac*, liſés 3*ac*.

40 lig. 8, 2*b*, liſés *b*.

46 lig. 9, par *c*, liſés par *dc*.

lig. 30, $-ax$, liſés $-ac$.

47 l. 21, $2a^3c^2-5a^4b$, liſés $2a^3c^2-5a^4b+6a^5$

lig. derniere $2a^3c$, lisés $2a^3c^2$.
48 lig. 19. $5a^4b$, lisés $-5a^4b$.
53 lig. 4, $-ac$, lisés $-ac^2$.
56 lig. 20, $10ba^3$, lisés $-10ba^3$.
57 lig. antepenultiéme $24b^2$, lisés $24b^4$.
59 lig. 16, $2acd$, lisés $2acd^2$.
67 lig. derniere $-f$, lisés $-af$.
68 lig. 1, 200, lisés 300.
lig. 20, $-\frac{1}{3}y$, lisés $-\frac{7}{3}y$.
lig. 22, $\frac{7}{2}y$, lisés $\frac{7}{3}y$.
74 lig. 7. $\frac{28}{7}$, lisés $\frac{258}{7}$.
79 lig. 9. au diviseur au lieu de $-mpq$, lisés $-mp^3q$.
82 aux deux dernieres lignes au lieu de $\frac{C}{D}$, lisés $\frac{D}{C}$.
87 lig. 12, $-2q^2$ lisés $-2q^3$.
89 lig. 24, $-\overline{dd}-cc$, lisés $-\overline{dd-cc}$.
90 lig. 14, $\overline{4ca-4aa}\times d$, lisés $\overline{4aa-4ca}\times d$.
lig. 21, $4ad+2cc$, lisés $-4ad+2cc$.
93 lig. 10, ez, lisés cz.

101 lig. 8, $a\times\overline{1-\frac{x^2}{000}}$, lisés $a\times\overline{1-\frac{x}{100}}^2$.

lig. 13, $a\times\overline{1-\frac{x}{100}}-b$ qui se réduit à $x-100x$,

lisés $a\times\overline{1-\frac{x}{100}}-b$ qui se réduit à x^2-100x.

102 lig. 4. $-1000000\frac{b}{a}$, lisés $1000000\frac{b}{a}$
104 lig. 6, c'est-à-dire $\frac{1}{2}p$, lisés c'est-à-dire $\frac{1}{4}p^2$.
lig. 9, $x-\frac{1}{2}p$, lisés $x+\frac{1}{2}p$.

105 lig. avant derniere $q + \frac{1}{2}p^2$, lisés $\overline{q + \frac{1}{4}p^2}$.

106 lig. 7. $\sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$, lisés $\sqrt{\overline{q + \frac{1}{4}p^2}}$.

112 lig. 1 $\frac{aanm}{n-m}$ lisés $\frac{aamm}{\overline{n-m}^2}$

lig 17, $\frac{a}{n-m} \times \overline{-n + \sqrt{nm}}$ lisés ……

$\frac{a}{n-m} \times \overline{-m \pm \sqrt{mn}}$.

167 à la derniere apostille, au lieu de lorsque l'x, lisés lorsque l'x^2.

253 avant derniere ligne ôtés le + qui est audessus de z^3, il doit être devant l'&c.

266 à l'apostille au lieu de pu, lisés px.

275 à l'apostille au lieu de $\frac{1}{2}qq$, lisés $\frac{1}{4}qq$.

285 lig. 21 *où*, lisés *ou*.

De l'Imprimerie de la Veuve DELATOUR, 1746.